övningar på induktion

ind 1. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$.

ind 2. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} k^2$.

ind 3. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

ind 4. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ind 5. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

ind 6. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

ind 7. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

ind 8. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

ind 9. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att
a) $4^{2n} + 4$ är delbart med 20.
b) $8^n - 7n - 1$ är delbart med 7.

ind 10. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller
a) $3^n \geq n^3$.
b) $(n!)^2 < 2^{n^2}$.

ind 11. Visa med induktion att en mängd med n element har 2^n delmängder.

ind 12. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2^k} \tan \tfrac{x}{2^k} = \tfrac{1}{2^n} \cot \tfrac{x}{2^n} - \cot x, \quad 0 < x < \pi$.

ind 13. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

ind 14. Visa att för alla naturliga tal $n \geq 4$ gäller

$$D^n \ln\left(\frac{1}{\left|x^2 - 1\right|}\right) = (-1)^n (n-1)!\left(\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

ind 15. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\int_0^1 (-\ln x)^n \, dx = n!$.

övningar på arcusfunktioner

arc 1. Beräkna **a)** $\cos\left(2\arctan\frac{1}{2}\right)$.
b) $\sin\left(\arctan 2-\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.
c) $\tan\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)$.

arc 2. Beräkna **a)** $\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{3}{4}$.
b) $2\arctan 2+\arcsin\frac{4}{5}$.
c) $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$.

arc 3. Visa att $\operatorname{arccot}F_{2n}=\operatorname{arccot}F_{2n+1}+\operatorname{arccot}F_{2n+2}$ ($n\in\mathbb{N}$, $F_n=$ Fibonaccital).

arc 4. Lös ekvationen **a)** $\arctan x=\arccos(2x)$.
b) $\dfrac{1}{(\sin(\arctan x))^2}-\dfrac{1}{(\tan(\arcsin x))^2}=4x^2$.

arc 5. Rita funktionen **a)** $y=\arctan\dfrac{e^x-1}{\sqrt{3}}-\arctan\dfrac{e^x-4}{\sqrt{3}\,e^x}$.
b) $y=2\arctan x+\arctan\dfrac{2x}{x^2-1}$.

arc 6. Beräkna f^{-1} då **a)** $f(x)=\tanh x$.
b) $f(x)=\cosh x$ för $x\in D_f=[0,\infty[$.

svar: **arc 1**: **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{3}{4}$

arc 2: **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** π **c)** $\frac{\pi}{4}$ (med denna formel beräknade *J. Machin* (~1705) talet π med 100 decimaler!)

arc 4: **a)** $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}$ **b)** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

arc 5: funktionerna är styckvis konstanta: **a)** $y=\frac{\pi}{3}$ **b)** $y=\begin{cases}-\pi, & x<-1\\ 0, & -1<x<1\\ \pi, & x>1\end{cases}$

arc 6: **a)** $\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$ **b)** $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $x\geq 1$

standardgränsvärden

$\frac{1}{x}\to\pm\infty\Leftrightarrow x\to 0\pm$	$\frac{1}{x}\to 0\pm\Leftrightarrow x\to\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
$p,q\in\mathbb{R}, p>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^q}{e^{px}}=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^q}{x^p}=0$	$\lim\limits_{x\to 0+}x^p(\ln x)^q=0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$