Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 09-01-17

uppg.1

$(x+y+z)^9 = \underbrace{(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot\ldots\cdot(x+y+z)}_{9 \text{ faktorer}}$, ur dessa 9 faktorer kan man välja faktorn x tre gånger på $\binom{9}{3}$ olika sätt, sedan faktorn y tre gånger ur de resterande 6 faktorerna på $\binom{6}{3}$ olika sätt, faktorn z måste då väljas ur de resterande 3 faktorerna, totalt ger det $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$ olika sätt att få $x^3y^3z^3$ (ordningen spelar ingen roll ty produkten är kommutativ).

Alternativt fås det med binomialteoremet:

$(x+y+z)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^k(y+z)^{9-k}$, k måste alltså vara 3 och då är

$\binom{9}{3}x^3(y+z)^{9-3} = \binom{9}{3}x^3\sum_{m=0}^{6}\binom{6}{m}y^m z^{6-m}$, m måste alltså vara 3 och

koefficienten är $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$ som ovan.

Uträkning: $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 3\cdot8\cdot7\cdot10 = 210\cdot8 = \underline{1680}$.

svar: $\boxed{1680}$

uppg. 2

a) Definitionsmängden av $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ är $D_f = [-1,1[$ ty $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = [-1,1]$ och $\arccos 1 = 0 < \arccos x$ för $x \in [-1,1[$.

f är strängt växande, ty arcsin är strängt växande och arccos är strängt avtagande, alltså är f injektiv och $f(-1) = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi} = -\frac{1}{2}$ är f:s minsta värde; vidare gäller $f(x) \to \infty$ då $x \to 1$- (ty $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ och $\arccos \to 0_+$ då $x \to 1$-), s.o.m.v. ger då (f är kontinuerlig) att $\underline{V_f = \left[-\frac{1}{2},\infty\right[}$.

ANM: Man kan även räkna med (lättare?) $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{\arccos x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\arccos x} - 1$.

b) Tangenten genom $(0, f(0)) = (0,0)$ har ekvationen $y - 0 = f'(0)(x-0)$, $f'(x) = \frac{\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arccos x)^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$, alltså $f'(0) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{2}{\pi}$ och tangenten: $\underline{y = \frac{2}{\pi}x}$.

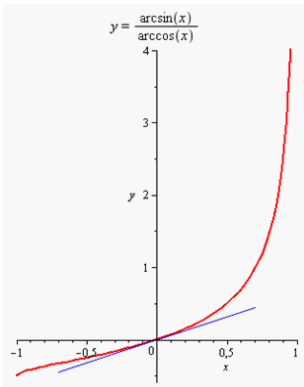
ANM: Det ger igen att f är strängt växande ty $f'(x) > 0$ för $|x| < 1$.

Vidare gäller $Df^{-1}(2) = \frac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = \frac{\arcsin a}{\arccos a} = 2$; vi ser

$2 = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}{\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}}$, alltså $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (eller lös ekvationen $\arcsin a = 2\arccos a \Rightarrow$ $a = \sin(2\arccos a) = 2\sin(\arccos a)\,a \underset{a\neq0,\sin a>0}{\Longrightarrow} 1 = 4\sqrt{1-a^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$),

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{36}{\pi}$ och därmed $\underline{Df^{-1}(2) = \frac{\pi}{36}}$.

svar: $\boxed{\textbf{a)}\ D_f = [-1,1[,\ V_f = \left[-\frac{1}{2},\infty\right[\qquad \textbf{b)}\ \text{tangent: } y = \frac{2}{\pi}x,\ Df^{-1}(2) = \frac{\pi}{36}}$



uppg. 3

Vi räknar på $]1,\infty[$, där är $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ kontinuerlig.

a) En primitiv funktion till f fås med hjälp av en lämplig substituion som "får bort roten", vi bjuder på 4 lösningar:

<u>lösnin1</u>: $x = \frac{1}{\sin t}$ $\left(t \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$: då är $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ och
$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}\right)^3} \cdot \frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{-\sin t}{\cos^2 t}dt = -\frac{1}{2\cos t} + c =$
$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + c = \underline{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c}.$

<u>lösnin2</u>: $x = \cosh t$, då är $x^2 - 1 = \sinh^2(t)$ och $dx = \sinh(t)\,dt$, alltså $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sinh^2 t}dt = -\frac{\cosh t}{\sinh t} + c = \underline{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c}.$

<u>lösnin3</u>: Substitutionen $x^2-1 = t^2$ är kanske värt ett försök: då är $2xdx = 2tdt$, alltså $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}xdx = \int \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}dt$ och denna integral löses (enklast?) med $t = \tan v$ $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(v)}} = \cos v,\ dt = \frac{1}{\cos^2(v)}dt\right)$: $\int \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}dt =$
$= \int \frac{\cos v}{\sin^2(v)}dv = -\frac{1}{\sin v} + c = -\frac{1}{\sin(\arctan t)} + c = -\frac{1}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} + c = \underline{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c}.$

<u>lösnin4:</u> Och så finns ju den trixiga substitutionen $t = x + \sqrt{x^2-1}$:
$(t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2 = x^2 - 1$ ger $x = \frac{t^2+1}{2t}$, $dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$ och
$\sqrt{x^2-1} = t - x = \frac{t^2-1}{2t}$, alltså $\int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^3} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}dt = \int \frac{4t}{(t^2-1)^2}dt =$
$= \frac{-2}{t^2-1} + c = \frac{-2}{2tx-2} + c = \underline{\frac{-1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}-1} + c}$ [jo då, det är också en primitiv funktion till f, derivera eller kolla $\frac{-1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$!!].

b) Man ser direkt att $F(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, en primitiv funktion till f enligt **a)**, saknar gränsvärde då $x \to 1_+$, dvs. att $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ är divergent och att $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ har ett gränsvärde då $x \to \infty$ $(= -1)$, dvs. att $\int\limits_2^\infty f(x)\,dx$ är

konvergent. Det inses även utan att man känner en primitiv funktion till f:

$0 < f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} < \frac{2}{x^3}$ då $x >$ ngt. ω (ty $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \to 1$ då $x \to \infty$, alltså $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{2}$ för $x >$ ngt. ω (t.ex. för $x > \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}$), $\int\limits_2^\infty \frac{2}{x^3}dx$ är konvergent (standard), jämförelsekriteriet ger att då även $\int\limits_2^\infty f(x)\,dx$ är konvergent.

För $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ kan vi uppskatta $\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}3^{\frac{3}{2}}} > 0$ (ty $(x+1)^{\frac{3}{2}} < 3^{\frac{3}{2}}$ för $1 < x \le 2$), $\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{2}{\sqrt{x-1}}\right]_1^2$ är divergent, jämförelsekriteriet ger att då även $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ är divergent.

svar:

a) $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	**b)** $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ är divergent, $\int\limits_2^\infty f(x)\,dx$ är konvergent

uppg. 4

$$f(x) = |1-x|\,x^{\frac{x}{1-x}} = \begin{cases} (1-x)\,x^{\frac{x}{1-x}} = x^{\frac{x}{1-x}} - x^{\frac{1}{1-x}} & \text{då } 0 < x < 1 \\ (x-1)\,x^{\frac{x}{1-x}} = x^{\frac{1}{1-x}} - x^{\frac{x}{1-x}} & \text{då } 1 < x \end{cases}.$$

[Jämför instuderingsuppgifter, extrauppgift 9].

a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} (1-x)\,e^{\frac{x\ln x}{1-x}} = 1\cdot e^0$ ty $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$ och e^x är C^0.

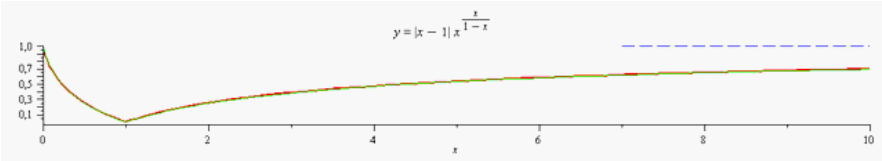
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} |1-x|\,e^{\frac{x\ln x}{1-x}} = 0\cdot(-1)$ ty $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = -\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1} =$
$= -\lim\limits_{x-1=h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = -1$ och e^x är C^0.

Vi har alltså $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$, dvs. f är kontinuerlig i 0 och i 1; i alla övriga punkter $x \in]0,\infty[\setminus\{1\}$ är f kontinuerlig ty f är sammansatt av kontinuerliga funktioner.

b) Att f antar sitt minsta värde i 1 inses direkt: $f(x) \ge 0 = f(1)$. För $0 < x < 1$ är $f'(x) = \left((1-x)\,e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\right)' = (1-x)\,e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\left(\frac{x\ln x}{1-x}\right)' - e^{\frac{x\ln x}{1-x}} =$
$= e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\left(\frac{(\ln x+1)(1-x)+x\ln x}{1-x} - 1\right) = e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\,\frac{\ln x+1-x-1+x}{1-x} = \underline{e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\,\frac{\ln x}{1-x}} < 0$;
för $1 < x$ är $f'(x) = \left(-(1-x)\,e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\right)' =$[s.o.]$= \underline{e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\,\frac{\ln x}{x-1}} > 0$. Det ger: f är str. avtagande på $[0,1]$ och strängt växande på $[1,\infty[$, alltså antar f i 0 ett strängt lokalt maximum och i 1 ett strängt minimum.

Vidare är $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{1-x}} - x^{\frac{x}{1-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(e^{\frac{\ln x}{1-x}} - e^{\frac{x\ln x}{1-x}}\right) = e^0 - 0$ ty $\frac{\ln x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{\ln x}{x} \to -1\cdot 0$ då $x \to \infty$ och $\frac{x\ln x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-1}\cdot\ln x \to -\infty$ då $x \to \infty$ och e^x är C^0. Det ger att $y = 1$ är asymptot och att

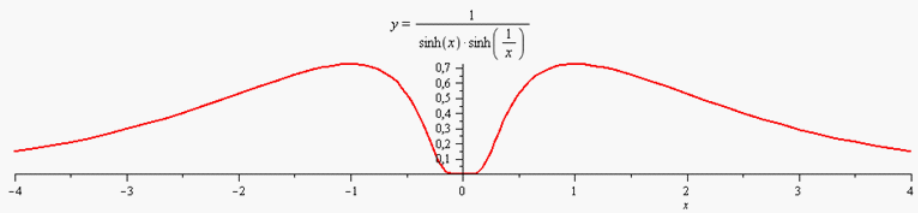
$0 \le f(x) < 1$ då $1 \le x$ (f är str. växande på $[1, \infty[$), f antar alltså i 0 sitt största värde.



svar: $\boxed{f \text{ antar ett str. maximum i 0, ett str. minimum i 1, } y = 1 \text{ är asymptot}}$

uppg. 5

a) Funktionen $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sinh(x)\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{för } 0 \neq x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$ är deriverbar i alla punkter $0 \neq x \in \mathbb{R}$ (ty sammansatt av deriverbara funktioner och nämnaren $\neq 0$ för $x \neq 0$). I origo gäller $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x\sinh(x)\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{\sinh(x)} \cdot \frac{1}{x^2\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} \to 0$ då $x \to 0$, ty $\frac{\sinh x - \sinh 0}{x} \to 1$ då $x \to 0$ ($= \cosh 0$, sinh är deriverbar) och $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{\frac{1}{|x|}=t\to\infty} \frac{t^2}{\sinh(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} \cdot \frac{2}{1-e^{-2t}} = 0 \cdot \frac{2}{1-0}$ (standard),
alltså är f deriverbar även i origo (med $f'(0) = 0$).
P.s.s. fås $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sinh(x)\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sinh(x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} = 0 \cdot 1$.

b) Inspirerade av **a)** ser vi $0 < \frac{x^2}{\sinh(x)\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} < 1$ för $x >$ ngt. $\omega > 0$
$\left[\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sinh(x)\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} = 0 \cdot \frac{1}{1} \text{ ty (se } \mathbf{a}\text{)}: \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1\right]$,
alltså har vi $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$, $\int\limits_{\omega}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent, jämförelsekriteriet ger att då även $\int\limits_{\omega}^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent och då är $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\omega} f(x)\,dx + \int\limits_{\omega}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent ($\int\limits_{0}^{\omega} f(x)\,dx$ är ej generaliserad i 0 ty f är kontinuerlig).

svar: $\boxed{\mathbf{a)}\ f \text{ är deriverbar (på hela } \mathbb{R}),\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \mathbf{b)} \text{ konvergent}}$