

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2009-08-20, kl. 8.30-12.30 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Fredrik Lindgren, tel. 0762 – 721861**OBS:** Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt.

1. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ för $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$. (2p var) (6p)
2. Visa att $\arctan(\sinh(x)) = \arcsin(\tanh(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (4p)
3. Beräkna längden av kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (2t, t^2 \sin t, t^2 \cos t)$, $-\pi \xrightarrow{t} \pi$. (5p)
4. Låt $f(x) = \frac{\arctan x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}$. Avgör om $\int_0^{\infty} f(x) dx$ är konvergent eller divergent
 - a) utan att beräkna en primitiv funktion till f . (4p)
 - b) genom att beräkna en primitiv funktion till f . (5p) (9p)
5. Låt $f(x) = (2 - \cos x)\sqrt{1 + \cos x}$.
 - a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ för $x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (7p)
 - b) Beräkna arean av området $\{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (6p)
 - c) Är f deriverbar i π ? (4p)
6. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion som är deriverbar på $]a, b[\setminus \{x_0\}$, $x_0 \in]a, b[\subseteq D_f$. Bevisa eller motbevisa följande påståenden:
 - a) Om $f'(x)$ har ett gränsvärde då x går mot x_0 så är f deriverbar i x_0 . (2p)
 - b) Om f är kontinuerlig och $f'(x)$ har ett gränsvärde då x går mot x_0 så är f deriverbar i x_0 . (4p)
7. Visa att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$. (6p)
8. Formulera och bevis integralkalkylens medelvärdessats för två (obs!) funktioner. (7p)