

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 09-08-20

uppg.1

$$f(x) = x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\ln x}{1-x}}, \text{ vi studerar } g(x) = \frac{\ln x}{1-x}:$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \ln x \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow 0+,$$

$$g(x) = -\frac{\ln(1+x-1)}{x-1} \rightarrow -1 \text{ då } x \rightarrow 1,$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-1} \frac{\ln(x)}{x} \rightarrow -1 \cdot 0 \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

$$\text{Vi använde standardgränsvärdena } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ och } \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln(h)}{h} = 0.$$

$$\exp \text{ är kontinuerlig, alltså: } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e^{-1}, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^0.$$

svar: a) 0 resp. $\frac{1}{e}$ resp. 1

uppg. 2

Det räcker att visa $\arctan(\sinh x) = \arcsin(\tanh x)$ för $x > 0$ ty

$$\arctan(\sinh 0) = \arctan(0) = 0 = \arcsin(0) = \arcsin(\tanh 0)$$

och alla inblandade funktionerna är udda:

$$\arctan(\sinh(-x)) = \arctan(-\sinh(x)) = -\arctan(\sinh(x)),$$

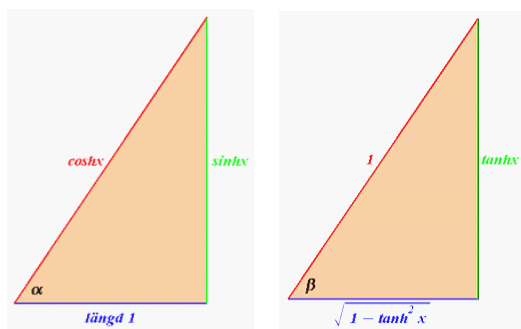
$$\arcsin(\tanh(-x)) = \arcsin(-\tanh(x)) = -\arcsin(\tanh(x)).$$

För $x > 0$ är $\alpha = \arctan(\sinh x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

lösning 1: rita en rätvinklig triangel med katederna 1 och $\sinh x$,

då är hypotenusan $\sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x$, $\tan \alpha = \sinh x$ och

$$\sin \alpha = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x. \quad \text{vsv}$$



lösning 2: sätt $\beta = \arcsin(\tanh x)$, då är $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan \beta = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} =$
 $= \frac{\sinh x}{\cosh x} \cosh x = \sinh x$ och $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\sinh x - \sinh x}{1 + \sinh^2 x} = 0$,
 alltså $\alpha - \beta = k\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ ger $k = 0$. vsv

lösning 3: sätt $f(x) = \arctan(\sinh x) - \arcsin(\tanh x)$, då är

$$f'(x) = \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} - \frac{1}{\cosh x} = 0, \text{ det visar att}$$

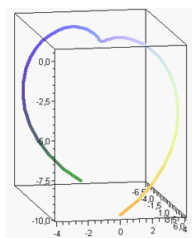
$$f(x) = c \text{ (konstant)}, f(0) = 0 \text{ ger } c = 0. \quad \text{vsv}$$

uppg. 3

Längden av kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (2t, t^2 \sin t, t^2 \cos t)$, $-\pi \xrightarrow{t} \pi$ är

$$\int_C ds = \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2^2 + (2t \sin t + t^2 \cos t)^2 + (2t \cos t - t^2 \sin t)^2} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (2 + t^2) dt = 2 \left[2t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = 4\pi + \frac{2}{3}\pi^3.$$



svar: $\boxed{4\pi + \frac{2}{3}\pi^3}$

uppg. 4

$$f(x) = \frac{\arctan x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}.$$

a) För $x > 1$ är $0 < f(x) < \frac{\frac{\pi}{2}}{1+2x+x^2} + \frac{x+1}{(1+x)(1+x^2)} < \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} + \frac{1}{x^2}$,
 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent, enligt jämförelsekriteriet är då även $\int_1^{\infty} f(x) dx$ och

därmed $\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergent.

b) $F(x) = \int \left(\frac{\arctan x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)(1+x^2)} \right) dx = [\text{första termen med partiell integration}]$
 $= -\frac{1}{1+x} \arctan x + \int \frac{1}{(x+1)(1+x^2)} dx + \int \frac{x}{(x+1)(1+x^2)} dx =$
 $= -\frac{\arctan x}{1+x} + \int \frac{1+x}{(x+1)(1+x^2)} dx = -\frac{\arctan x}{1+x} + \arctan x$, alltså är
 $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan x \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) \right) - 0 = \frac{\pi}{2} (1 - 0).$

svar: $\boxed{\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \text{ är konvergent}}$

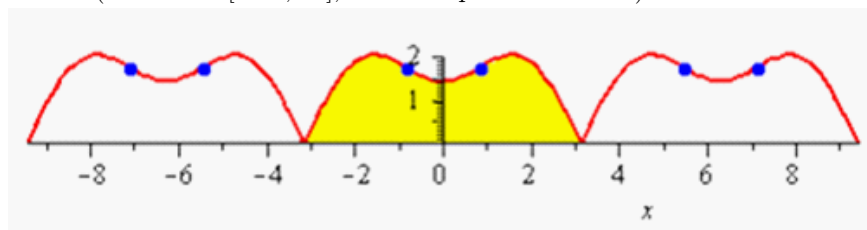
uppg. 5

$f : x \mapsto (2 - \cos x) \sqrt{1 + \cos x}$ är kontinuerlig ($1 + \cos x \geq 0$), 2π -periodisk och jämn, det räcker alltså att studera f på $[0, \pi]$:

a) för $x \in]0, \pi[$ är $f'(x) = \sin x \sqrt{1 + \cos x} + \frac{(2 - \cos x)(-\sin x)}{2\sqrt{1 + \cos x}} =$
 $= \frac{2 \sin x (1 + \cos x) + \sin x \cos x - 2 \sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}} = \frac{3 \sin 2x}{4\sqrt{1 + \cos x}} \begin{cases} > 0 \text{ för } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ < 0 \text{ för } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$, det visar

att f har ett strängt lokalt minimum i 0 ($f(0) = \sqrt{2}$) och i π ($f(\pi) = 0$) och ett strängt lokalt maximum i $\frac{\pi}{2}$ ($f(\frac{\pi}{2}) = 2$).

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}f''(x) &= \frac{2\cos(2x)\sqrt{1+\cos x} + \frac{\sin(2x)\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}}{1+\cos x} = \frac{2(2\cos^2 x - 1) + \frac{\sin^2 x \cos x}{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} = \\ &= \frac{4\cos^2 x - 2 + (1-\cos x)\cos x}{\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} (3\cos^2 x + \cos x - 2) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{1+\cos x}} (\cos x + 1) \left(\cos x - \frac{2}{3}\right) \begin{cases} > 0 \text{ för } 0 < x < \arccos \frac{2}{3} \\ < 0 \text{ för } \arccos \frac{2}{3} < x < \pi \end{cases}, \text{ det visar} \\ &\text{att } f \text{ är str. konvex på } [0, \arccos \frac{2}{3}] \text{ och str. konkav på } [\arccos \frac{2}{3}, \pi] \\ &(\arccos \frac{2}{3} \text{ är en inflexionspunkt; } \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ger } \frac{\pi}{4} < \arccos \frac{2}{3} < \frac{\pi}{3}). \\ &\text{Grafen (ritad över } [-3\pi, 3\pi], \text{ inflexionspunkterna blåa):} \end{aligned}$$



- b) $f(x) \geq 0$, f är jämn, arean av $D = \{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$ är alltså $m(D) = 2 \int_0^\pi f(x) dx$. För att undvika generaliserade integraler

bestämmer vi först en primitiv funktion till f på $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \text{för } 0 < x < \pi \text{ är } F(x) &= \int (2 - \cos x) \sqrt{1 + \cos x} dx = \int \frac{(2 - \cos x) \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx = \\ &= \int \frac{(1 - \cos x + 1) \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx = \int \left(\sqrt{1 - \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}} \right) \sin x dx = \\ &= \frac{2}{3} (1 - \cos x)^{\frac{3}{2}} + 2 (1 - \cos x)^{\frac{1}{2}}, \text{ alltså är } m(D) = 2 [F(x)]_0^\pi = \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} (1 - \cos x)^{\frac{3}{2}} + 2 (1 - \cos x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^\pi = 2 \left(\frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{2}{3} + 1 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eller } 2 \int_0^\pi f(x) dx &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2} (2 \cos \frac{x}{2} - \cos x \cos \frac{x}{2}) dx = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi (2 \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2})) dx = 2\sqrt{2} \left[3 \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} \right]_0^\pi. \end{aligned}$$

- c) f är deriverbar i alla punkter $a \neq (2k+1)\pi$ ty $\sqrt{x}$ är deriverbar för $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{För } a = \pi \text{ gäller: } \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} &= \frac{(2 - \cos(\pi+h))\sqrt{1 + \cos(\pi+h)} - 0}{h} = \frac{(2 + \cosh)\sqrt{1 - \cosh}}{h} = \\ &= \frac{(2 + \cosh)}{\sqrt{1 + \cosh}} \cdot \frac{|\sinh|}{h} \begin{cases} \rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ då } h \rightarrow 0^- \\ \rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ då } h \rightarrow 0^+ \end{cases}, \text{ det visar att } \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} \text{ saknar} \end{aligned}$$

gränsvärde då $h \rightarrow 0$, dvs. f är inte deriverbar i π (och därmed inte i någon punkt $(2k+1)\pi$).

ANM: För att rita grafen noggrannare kan man utnyttja

$$f'(x) = \frac{3 \sin 2x}{4\sqrt{1+\cos x}} = \frac{3 \sin x \cos x \sqrt{1-\cos x}}{2|\sin x|} \begin{cases} \rightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ då } x \rightarrow \pi^- \\ \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ då } x \rightarrow \pi^+ \end{cases}.$$

svar: (bara för $[-\pi, \pi]$, analogt utanför $[-\pi, \pi]$, f är 2π -periodisk!):

a) max-punkter: $\pm \frac{\pi}{2}$, min-punkter: $\pm \pi$, lokala min-punkt: 0

f är konvex på $[-\alpha, \alpha]$, konkav på $[-\pi, -\alpha]$ och på $[\alpha, \pi]$ där $\alpha = \arccos \frac{2}{3}$

b) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ c) f är inte deriverbar i $\pm \pi$

uppg. 6

a) **Falskt**: för $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ gäller $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ för $x \neq 0$,
alltså $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ men f är inte deriverbar (inte ens kontinuerlig) i 0.

b) **Sant**: Vi behöver bara visa att f är deriverbar även i x_0 :

betrakta differenskvoten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ($x_0 \neq x \in]a, b[$)

för $x < x_0$:

MVS gäller enligt förutsättningarna för intervallet $[x, x_0]$ och ger:

det finns ett $\xi_x \in]x, x_0[$ så att $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_x)$, eftersom $f'(x)$ har ett gränsvärde då $x \rightarrow x_0$ och $\xi_x \rightarrow x_0^-$ då $x \rightarrow x_0^-$ [$x < \xi_x < x_0$] så gäller

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Analogt för $x > x_0$:

MVS gäller för intervallet $[x_0, x]$ och ger:

det finns ett $\eta_x \in]x_0, x[$ så att $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\eta_x)$ och då gäller

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(\eta_x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \quad (\eta_x \rightarrow x_0^+ \text{ då } x \rightarrow x_0^+),$$

alltså existerar $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. vsv

ANM: Omvändningen gäller ej: att f är deriverbar i en punkt x_0 innebär inte att $f'(x)$ har ett gränsvärde då $x \rightarrow x_0$ (eller: att $f'(x)$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow x_0$ ger inte att f inte är deriverbar i x_0 ,

6b) kann alltså ej användas för **5c)**!