

**Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2008-10-23, kl. 8.30-12.30 i H****Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** David Witt Nyström, tel. 0762 – 721860**OBS:** Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt.

1. Låt  $f(x) = x \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ .

a) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  (3p) och  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$  (2p). (5p)

b) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $y = f(x)$  i punkten  $\left(\frac{1}{\ln 2}, f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right)$ . (3p)

2. Låt  $f(x) = \arccos x - \arctan x$ .

a) Visa att  $f$  är injektiv, bestäm  $D_f$ ,  $V_f$  och  $Df^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . (4p)

b) Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av  $x$ -axeln,  $y$ -axeln och kurvan  $y = f(x)$  (3p för beräkning av nollstället  $x_0 : f(x_0) = 0$ ). (7p)

3. Låt  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ .

a) Visa att  $f$  är injektiv och beräkna  $f^{-1}$ . (4p)

b) Är  $f \in C^1$ ? Är  $f \in C^2$ ? Motivera väl! (5p)

c) Rita kurvan  $y = f(x)$  med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (3p)

4. Beräkna längden av kurvan  $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t}\right)$ ,  $1 \rightarrow 3\sqrt{11}$ . (6p)

5. Låt  $f(x) = \frac{\ln(x) \arctan\left(\frac{1}{1-\sin(x)}\right)}{x\sqrt{x}}$ .

a) Är den generaliserade integralen  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konvergent eller divergent? (5p)

b) Bestäm  $\inf\{f(n) : 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$ . (4p)

6. a) Definiera  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . (2p)

b) Visa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . (2p)

c) Definiera  $\binom{n}{m}$  ( $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$ ). (2p)

7. Visa att för en funktion  $f$  som är deriverbar i  $]a, b[$  gäller:

$f'(x) \geq 0$  för alla  $x \in ]a, b[ \Leftrightarrow f$  är växande på  $]a, b[$  (obs: det är 2 påståenden!). (8p)