

Tentamen inledande matematisk analys för F1 och TM (tma970), 08-10-23

uppg.1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\sinh \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right) \frac{1}{2} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\ln \left(e^{\frac{1}{x}} \left(1 - e^{-\frac{2}{x}} \right) \right) - \ln 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{1}{x} + \ln \left(1 - e^{-\frac{2}{x}} \right) - \ln 2 \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + x \ln \left(1 - e^{-\frac{2}{x}} \right) - x \ln 2 \right) = 1 - 0 \ln 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

ty $t = \frac{2}{x} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$, $1 - e^{-t} \rightarrow 1 - 0$ då $t \rightarrow \infty$ och $\ln$ är kontinuerlig.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{\frac{1}{x} = t \rightarrow 0^+} t \ln (\sinh (t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sinh t} (\sinh (t) \ln (\sinh (t))) = 1 \cdot 0 = 0,$$

ty $v \ln (v) \rightarrow 0$ då $v \rightarrow 0^+$ (standard) och $\frac{\sinh(t) - \sinh(0)}{t} \rightarrow \cosh(0) = 1$ då $t \rightarrow 0$ ($\sinh$ är deriverbar).

b) Tangentens ekvation i $(a, f(a))$ är $y - f(a) = f'(a)(x - a)$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \left(\sinh \left(\frac{1}{x} \right) \right) - \frac{\cos \left(\frac{1}{x} \right)}{x \sinh \left(\frac{1}{x} \right)}; \text{ för } a = \frac{1}{\ln 2} \text{ är } \sinh (\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \\ &= \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}, \cosh (\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}, \text{ alltså } f \left(\frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 2}, \\ f' \left(\frac{1}{\ln 2} \right) &= \ln (\sinh (\ln (2))) - \frac{\ln (2) \cosh (\ln (2))}{\sinh (\ln (2))} = \ln 3 - \ln 4 - \ln 2 \frac{5}{4} = \frac{3 \ln 3 - 11 \ln 2}{3} \end{aligned}$$

och tangentens ekvation är $y - \frac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 2} = \frac{3 \ln 3 - 11 \ln 2}{3} \left(x - \frac{1}{\ln (2)} \right)$

eller $\ln 2(11 \ln 2 - 3 \ln 3)x + 3 \ln 2y = 5 \ln 2$.

svar: a) 1 resp. 0	b) $(11 \ln 2 - 3 \ln 3)x + 3y = 5$
---------------------------	-------------------------------------

uppg. 2

a) $f(x) = \arccos x - \arctan x$ är strängt avtagande ($\arccos$ är str. avtagande, $\arctan$ är str. växande), alltså injektiv; $D_{\arccos} = [-1, 1]$, $D_{\arctan} = \mathbb{R}$, alltså är $D_f = [-1, 1]$; eftersom f är (str.) avtagande så är $f(-1) = \pi - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4}$ f :s största värde och $f(1) = 0 - \frac{\pi}{4}$ f :s minsta värde och eftersom f är kontinuerlig så ger s.o.m.v. att f antar alla värden emellan också, alltså är $V_f = [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. För $|x| < 1$ är $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}$ (< 0 , det ger igen att f är str. avtagande!), $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = -2 \neq 0$, alltså är $Df^{-1}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{Df(0)} = -\frac{1}{2}$.

b) Eftersom f är avtagande och $f(0) = \frac{\pi}{2} > 0$ så är det område D i första kvadranten som begränsas av axlarna och kurvan $y = f(x)$

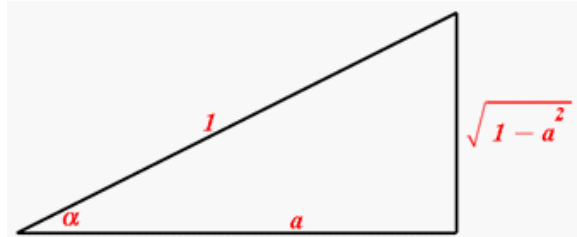
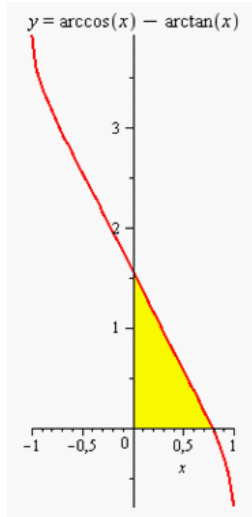
$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ där $f(a) = 0$ ($a > 0$).

Beräkning av a : sätt $\alpha = \arccos a = \arctan a$, då är $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ och därmed

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ (rita en rätvinklig triangel med närkatet a och hypotenusan 1, se figur nedan). $\cos \alpha = \tan \alpha \Rightarrow a = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \iff \sqrt{1-a^2} = a^2 \iff a^4 + a^2 = 1$,

det ger $a^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ och $a = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ($0 < a < 1$!).

$$\begin{aligned}
D \text{ har arean } \int_0^a f(x) dx &= [\text{p.i.}] = [xf(x)]_0^a - \int_0^a xf'(x) dx = [f(a) = 0] \\
&= 0 + \int_0^a x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = [-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_0^a = \\
&= \frac{1}{2} \ln(1+a^2) - \sqrt{1-a^2} + 1 = 1 + \ln \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.
\end{aligned}$$



svar:

$$\text{a) } D_f = [-1, 1], V_f = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], Df^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{b) } 1 + \ln \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

uppg. 3

Observera att f är udda, det räcker alltså att endast betrakta $[0, \infty[$, men vi genomför ändå räkningarna på hela $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} -1 + \frac{1}{1-x} & \text{då } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{då } x \geq 0 \end{cases}$, det visar att f är strängt växande alltså injektiv. För att beräkna f^{-1} skall vi lösa ekvationen $f(x) = y$ för $y \in V_f$, vi bestämmer alltså först V_f : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 + 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 - 0$, f är strängt växande och kontinuerlig (sammansatt av kontinuerliga funktioner, nämnare $\neq 0$), s.o.m.v. ger att $V_f =]-1, 1[$; vidare ser vi att $f(x) \geq 0$ för $x \geq 0$ och att $f(x) \leq 0$ för $x \leq 0$; då löser vi nu ekvationen:
för $x \leq 0$ (och då $-1 < y \leq 0$): $-1 + \frac{1}{1-x} = y \iff 1-x = \frac{1}{1+y} \iff x = \frac{y}{1+y}$,
för $x \geq 0$ (och då $0 \leq y < 1$): $1 - \frac{1}{1+x} = y \iff 1+x = \frac{1}{1-y} \iff x = \frac{y}{1-y}$,
alltså $x = \frac{y}{1-|y|} = f^{-1}(y)$ (udda!).

b) f är C^∞ i alla punkter $0 \neq x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (rationell funktion!); vi undersöker först om f är deriverbar i origo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{f\"or } x > 0 \text{ g\"aller: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{1+x}-0}{x} = \frac{1}{1+x} \rightarrow 1 \text{ d\"a } x \rightarrow 0_+ \\ \text{f\"or } x < 0 \text{ g\"aller: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{1-x}-0}{x} = \frac{1}{1-x} \rightarrow 1 \text{ d\"a } x \rightarrow 0_- \end{array} \right\}, \text{ det visar}$$

att f är deriverbar i origo med $f'(0) = 1$.

$$\text{\"Ar } f' \text{ kontinuerlig i origo? } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{d\"a } x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{d\"a } x > 0 \end{cases}, \text{ allts\"a}$$

$$f'(x) \begin{cases} \rightarrow 1 & \text{d\"a } x \rightarrow 0_- \\ \rightarrow 1 & \text{d\"a } x \rightarrow 0_+ \end{cases}, \text{ dvs. } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1 = f'(0), f' \text{ \\"ar s\"aledes} \\ \text{kontinuerlig i origo.}$$

$$\text{\"Ar } f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1-x)^3} & \text{d\"a } x < 0 \\ \frac{-2}{(1+x)^3} & \text{d\"a } x > 0 \end{cases} \text{ kontinuerlig i origo? Nej, ty } f''(x) \text{ saknar}$$

$$\text{gr\"ansv\"arde d\"a } x \rightarrow 0: \lim_{x \rightarrow 0_+} f''(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 0_-} f''(x) = 2.$$

Du kan \\"aven visa att f' inte ens \\"ar deriverbar i origo:

$$\text{f\"or } x > 0 \text{ g\"aller: } \frac{\Delta f'}{\Delta x} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{\frac{1}{(1+x)^2}-1}{x} = \frac{-x^2-2x}{x(1+x)^2} \rightarrow -2 \text{ d\"a } x \rightarrow 0_+$$

$$\text{f\"or } x < 0 \text{ g\"aller: } \frac{\Delta f'}{\Delta x} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}-1}{x} = \frac{-x^2+2x}{x(1-x)^2} \rightarrow 2 \text{ d\"a } x \rightarrow 0_-$$

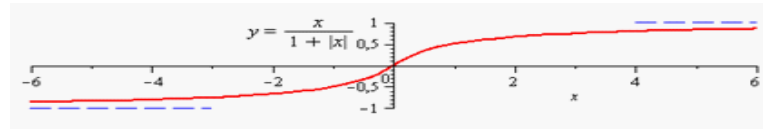
f' \\"ar allts\"a inte deriverbar (och d\"armed inte C^2) i origo.

c) Vi har ovan redan ber\"aknat asymptoterna $y = -1$ och $y = 1$;

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1-x)^3} > 0 & \text{d\"a } x < 0 \\ \frac{-2}{(1+x)^3} < 0 & \text{d\"a } x > 0 \end{cases}, \text{ det visar att } f \text{ \\"ar konvex i }]-\infty, 0] \text{ och} \\ \text{konkav i } [0, \infty[\text{ (0 \\"ar inflexionspunkt).}$$

svar:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1- x }, x \in]-1, 1[$	b) f \\"ar C^1 , inte C^2 (i origo)
c) $y = \pm 1$, f \\"ar konvex i $]-\infty, 0]$ och konkav i $[0, \infty[$	



uppg. 4

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t} \right), \mathbf{r}'(t) = \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^2}, \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2} \right), ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4}} dt,$$

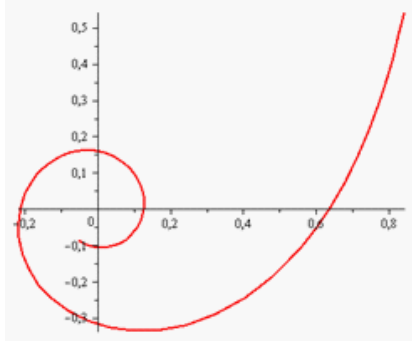
kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), 1 \xrightarrow{t} 3\sqrt{11}$ \\"ar f\"or $t \in [1, 3\sqrt{11}]$ av klassen C^1 , kurvans l\"angd

$$\text{\"ar allts\"a } L = \int_1^{3\sqrt{11}} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_1^{3\sqrt{11}} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2} dt = [\text{p.i.}] =$$

$$= \left[-\frac{1}{t} \sqrt{t^2+1} \right]_1^{3\sqrt{11}} + \int_1^{3\sqrt{11}} \frac{t}{t\sqrt{t^2+1}} dt = \sqrt{2} - \frac{10}{3\sqrt{11}} + [\ln(t + \sqrt{t^2+1})]_1^{3\sqrt{11}} = \\ = \sqrt{2} - \frac{10\sqrt{11}}{33} + \ln \frac{3\sqrt{11}+10}{1+\sqrt{2}}.$$

$$\text{svar: } \boxed{\frac{33\sqrt{2}-10\sqrt{11}}{33} + \ln(3\sqrt{22} + 10\sqrt{2} - 3\sqrt{11} - 10)}$$

C är en hyperbolisk spiral:



uppg. 5

a) Funktionen $g(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{1-\sin x}) & \text{för } 1 \leq x \neq \frac{(4n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \\ \frac{\pi}{2} & \text{för } x = \frac{(4n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ är
kontinuerlig på $[1, \infty[$ ty $1 - \sin x \rightarrow 0_+$, alltså $\frac{1}{1-\sin x} \rightarrow \infty$ och därmed $\arctan(\frac{1}{1-\sin x}) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \frac{(4n+1)\pi}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), alltså är produkten $\frac{\ln(x)g(x)}{x\sqrt{x}}$ kontinuerlig på $[1, \infty[$ och därmed f integrerbar över varje $[1, R]$ ($1 < R \in \mathbb{R}$).

Vidare gäller $0 \leq f(x) < \frac{\pi \ln x}{2x\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty \frac{\pi \ln x}{2x\sqrt{x}} dx = [\text{p.i.}] = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \ln x - \frac{4}{\sqrt{x}} \right]_1^\infty$ är

konvergent, enligt jämförelsekriteriet är då även $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergent; alternativt kan du utnyttja $\frac{\pi \ln x}{2x\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ (det gäller ty $\frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ (standard),

alltså $\frac{\pi \ln x}{2x^{\frac{1}{4}}} < 1$ för $x > \text{ngt. } \omega > 1$ och därmed $\frac{\pi \ln x}{2x\sqrt{x}} < \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} (x > \omega)$,

$\int_\omega^\infty x^{-\frac{5}{4}} dx$ är konvergent, och därmed är förståss $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergent.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)g(x)}{x\sqrt{x}} = 0$ ty $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = 0$ (standard) och $g(x)$ är begränsad ($0 \leq g(x) < \frac{\pi}{2}$); vi förmodar alltså och skall nu visa att

$\inf \{f(n) : 2 \leq n \in \mathbb{N}\} = 0$: 0 är en minarant ty $f(n) > 0$ för $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

0 är största minorant, ty till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\omega > 2$ så att

$\left| \frac{\ln(x)g(x)}{x\sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{\ln(x)g(x)}{x\sqrt{x}} < \epsilon$ för alla $x > \omega$ [$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)g(x)}{x\sqrt{x}} = 0$], för $\omega < n_0 \in \mathbb{N}$

gäller alltså $f(n_0) < \epsilon$, ϵ kan alltså inte vara minorant. vsv

Kurvan $y = f(x)$ ser ut så här (obs: skalan på y -axeln!):

