

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-10-27, kl. 14.00-18.00 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Martin Berglund, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Bestäm gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sinh \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{\frac{1}{x}}$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sinh \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. (3p var) (9p)
2. Låt $f(x) = 2x - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.
- a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet och värdemängden V_f . (7p)
- b) Är integralen $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (3p)
3. Bestäm a så att kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cosh t - t, \cosh t + t)$, $-a \xrightarrow{t} a$ har längden 4. (6p)
4. a) Visa att $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$ för alla $x > 0$. (4p)
- b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ på $]0, \infty[$ och avgör med hjälp härav om $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent eller divergent. (6p)
- c) Visa att $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ är injektiv på $]0, \infty[$ och beräkna $Dh^{-1}(2)$. (4p)
5. Låt $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$.
- a) Är f deriverbar i origo? Är f' kontinuerlig i origo? Motivera väl! (5p)
- b) Visa att f har ett strängt lokalt minimum i origo, men att f inte är avtagande i något intervall $]-\varepsilon, 0[$ och inte växande i något intervall $]0, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$). (4p)
6. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).
Visa att om $f'(x) = 0$ för varje $x \in]a, b[$ så är f konstant på $]a, b[$. (5p)
7. Visa att om en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) så är f integrerbar över $[a, b]$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-01-15, kl. 8.30-12.30 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Micke Persson, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. a) Visa med induktion att $(1+x)^n > 1+nx$ för alla $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 \neq x \in [-1, \infty[$. (5p)

b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) genom att använda binomialteoremet. (4p)

2. Låt $f(x) = |\sin x| e^{\cos x}$.

a) Är f deriverbar i origo? (3p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och inflexionspunkter. (6p)

c) Beräkna arean av området $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (4p)

3. Beräkna längden av kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (2t - \sin(2t), 4\sin(t), \cos(2t)), 0 \xrightarrow{t} 2\pi$. (6p)

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området

$\{(x, y) : \ln(2) \leq x, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{\sinh x}}\}$ roterar ett varv kring x -axeln. (7p)

5. Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}\right) + \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2}$ på $]0, \infty[$ (6p)

och avgör om $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent eller divergent (4p). (10p)

6. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $]a, b[\subseteq D_f$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

a) Visa att om f är strängt avtagande på $]a, b[$ så är f injektiv på $]a, b[$. (2p)

b) Visa att om f är deriverbar på $]a, b[$ och $f'(x) < 0$ för varje $x \in]a, b[$ så är f strängt avtagande på $]a, b[$. Gäller omvändningen? (6p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-08-21, kl. 8.30-12.30 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Aron Lagerberg, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.1. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ för

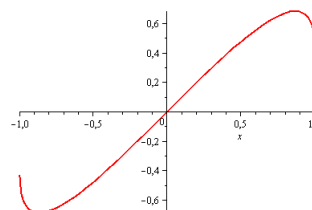
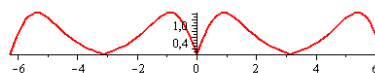
$$\text{a) } f(x) = x^{x \ln x} \quad \text{b) } f(x) = x^{(x \ln x)} \quad \text{c) } f(x) = (-\ln x)^x. \quad (6p)$$

2. Låt $f(x) = \frac{x \sinh(x) - \cosh(x)}{(\cosh(x))^2}$.a) Visa att f har ett nollställe i $]1, \frac{3}{2}[$. Hur många nollställen har f ? (5p)b) Visa att $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent utan att beräkna en primitiv funktion till f . (4p)c) Beräkna $\int_0^\infty f(x) dx$ (tips: integrera partiellt $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx \dots$). (4p)3. Låt $f(x) = \arcsin x + x(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}$.a) Visa att f är injektiv och ange $Df^{-1}(\frac{\pi}{4})$. (5p)b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)c) Är $|f|$ deriverbar i origo? (3p)d) Beräkna arean av området mellan kurvan $y = |f(x)|$ och linjen $y = \frac{\pi}{2}$. (7p)4. a) Visa att $\frac{2x}{\pi} < \sin x$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$. (4p)b) Visa Jordans lemma: För $A > 0$ gäller $\int_0^\pi e^{-A \sin x} dx < \frac{\pi}{A}$.[ledning: visa först med hjälp av a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx < \frac{\pi}{2A}$ (3p) ...] (6p)5. Visa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (4p)

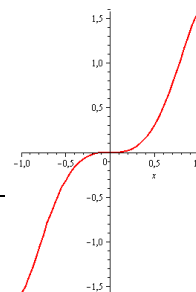
6. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Langranges sats). (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, 07/08**07-10-27**1) 0 resp. e resp. 1 2a) konvex i $[-1, 0]$, konkav i $[0, 1]$, $V_f = \left[\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right]$ b) konvergent 3) $a = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 4b) $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, konvergent c) $\frac{1}{2 \ln 2 - 1}$ 5a) f är deriverbar i origo men f' är ej kontinuerlig i origo**08-01-15**1b) $\frac{n(n-1)}{2}$ 2a) nej b) minimipunkter är $k\pi$,maximipunkter är $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi$, inflexionspunkter är $\frac{\pi}{2} + k\pi$ c) $4 \sinh 1$ 3) 8π 4) $\pi \ln 3$ 5) $x \ln \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}$ **08-08-21**

1a) 1 b) 0 c) 1 2a) 2 c) 0

3a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) konkav på $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right]$ och på $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right]$,konvex på $\left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ och på $\left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ c) ja d) $\frac{32}{15}$ *Området 08-08-21, uppg. 3d):*