Bevis av arc3

Påstående:

$$\arctan\frac{1}{F_{2n}} = \arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ F_n = \text{Fibonaccital}).$$

Bevis:

Vi visar $\tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n}}\right) = \tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$, det medför

$\arctan\frac{1}{F_{2n}} = \arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}} + k\pi$ och eftersom

$0 < \arctan\frac{1}{F_{2n}}, \arctan\frac{1}{F_{2n+1}}, \arctan\frac{1}{F_{2n+2}} < \frac{\pi}{2}$ så är $k = 0$ och påståendet visat:

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n}}\right) = \tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{F_{2n}} = \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}} \cdot \frac{1}{F_{2n+2}}} \Leftrightarrow \underbrace{F_{2n+1}F_{2n+2}}_{(F_{2n+1})^2 + F_{2n+1}F_{2n}} - 1 = F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n}F_{2n+1} \Leftrightarrow (F_{2n+1})^2 - 1 = F_{2n}F_{2n+2}$$

och detta stämmer (Fib 17)! vsv