

Övningsskrivning i inledande matematisk analys (TMA970), 2009-09-19

kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Aron Lagerberg, tel. 0762-721861

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper (blad utan kod rättas ej). Fyll i omslaget ordentligt.

1. Fibonaccitalen F_n ges av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ och följderna $f_n(x)$ definieras genom $x \in [0, \infty[$, $f_1(x) = f(x) = \frac{1}{1+x}$,
 $f_2(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f \circ f \circ f(x) = f \circ f_2(x) = f(f(f(x)))$, ...,
 $f_n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ gånger}} = f \circ f_{n-1}(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ gånger}} \quad (4 \leq n \in \mathbb{N})$.

a) Visa att $f_n(x) = \frac{F_n + F_{n-1}x}{F_{n+1} + F_n x}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (5p)

b) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (du får använda att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$). (2p)

2. Låt $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{1 + \sqrt[3]{|x|^5}}$, $D_f = \mathbb{R}$.

a) Visa att f är injektiv och bestäm f^{-1} (glöm ej att ange $D_{f^{-1}}$!). (7p)

b) Hur många gånger är f deriverbar? (4p)

3. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(3\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x - \frac{1}{2}} \right) - 4x - \sqrt{4x^2 - 1} \right)$. (5p)

4. a) Visa att om $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbara i en punkt $a \in \mathbb{R}$ så är även $f + g$ deriverbar i a . (4p)

b) Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$. (3p)