

# Övningstenta inledande matematisk analys (tma970), 09-09-19, lösningar

## uppg. 1

$F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  och  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  för  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  ( $x \geq 0$ ).

a) Vi skall visa att för alla  $n \in \mathbb{N}$  gäller  $f_n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ gånger}}(x) = \frac{F_n + F_{n-1}x}{F_{n+1} + F_n x}$ .

Bevis (med induktion):

I.  $n = 1$ :  $f_1(x) = f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{F_1 + F_0 x}{F_2 + F_1 x}$  är ok.

II. Förets.:  $f_p(x) = \frac{F_p + F_{p-1}x}{F_{p+1} + F_p x}$  gäller för  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq m_0$  för något  $m_0 \geq 1$ .

Påst.:  $f_{m_0+1}(x) = \frac{F_{m_0+1} + F_{m_0}x}{F_{m_0+2} + F_{m_0+1}x}$ .

Bevis:  $f_{m_0+1}(x) = f(f_{m_0}(x)) = \frac{1}{1+f_{m_0}(x)} = \frac{1}{1+\frac{F_{m_0}+F_{m_0-1}x}{F_{m_0+1}+F_{m_0}x}} =$   

$$= \frac{F_{m_0+1} + F_{m_0}x}{F_{m_0+1} + F_{m_0} + (F_{m_0} + F_{m_0-1})x} = \frac{F_{m_0+1} + F_{m_0}x}{F_{m_0+2} + F_{m_0+1}x}. \quad \text{vsv}$$

III. Induktionsaxiomet ger då att  $f_n(x) = \frac{F_n + F_{n-1}x}{F_{n+1} + F_n x}$  gäller för alla  $n \in \mathbb{N}$ . vsv

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{enl. a)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}x}{F_{n+1} + F_n x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}x}{\frac{F_{n+1}}{F_n} + x} = \frac{1 + \frac{1}{\Phi}x}{\Phi + x} = \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$ .

$\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = \frac{1}{\varphi} \text{ [Ö, fib18]; } x = 0: \text{dugga 07 !!} \right]. \quad \text{sva 1b: } \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi}$

## uppg. 2

$f$  är udda, det räcker alltså att betrakta bara  $[0, \infty[$ , men vi ger räkningarna även

för  $]-\infty, 0]$  (helt onödigt dock!):  $f(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}} + 1 - 1}{1 + |x|^{\frac{5}{3}}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} + 1} & \text{då } x \geq 0 \\ -1 - \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} - 1} & \text{då } x \leq 0 \end{cases}$ .

a)  $f$  är strängt växande på  $[0, \infty[$  ty  $x^{\frac{5}{3}} + 1$  är strängt växande på  $[0, \infty[$  [på  $]-\infty, 0]$  ty  $\frac{1}{x^{\frac{5}{3}} - 1}$  är str. växande där],  $f$  är alltså injektiv på  $]-\infty, 0]$  och på  $[0, \infty[$  och därmed på  $\mathbb{R}$  ty  $f(a) < 0 < f(b)$  för  $a < 0 < b$ ;

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} + 1} = 1 - 0$  ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} - 1} = -1 + 0$ ),

$f$  är kontinuerlig, satsen om mellanliggande värden ger då att  $V_f = ]-1, 1[$ ;

beräkning av  $f^{-1}$ , dvs. lösning av  $f(x) = y$  för  $y \in D_{f^{-1}} = V_f$ :

för  $0 \leq y < 1$ :  $y = f(x) = 1 - \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} + 1} \iff \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} + 1} = 1 - y \iff$

$$x^{\frac{5}{3}} + 1 = \frac{1}{1-y} \iff x^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{1-y} - 1 \iff x = \left( \frac{y}{1-y} \right)^{\frac{3}{5}},$$

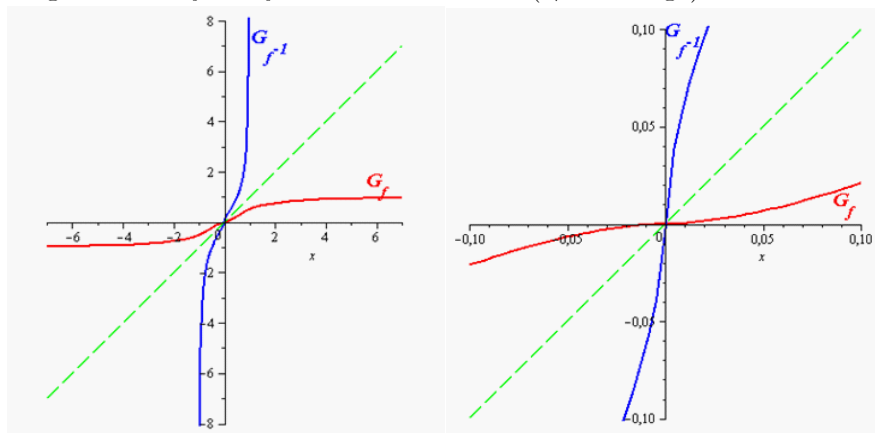
för  $-1 < y \leq 0$ :  $y = f(x) = -1 - \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} - 1} \iff \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} - 1} = -1 - y \iff$

$$x^{\frac{5}{3}} - 1 = \frac{-1}{1+y} \iff x^{\frac{5}{3}} = \frac{-1}{1+y} + 1 \iff x = \left( \frac{y}{1+y} \right)^{\frac{3}{5}}.$$

alltså är  $x = f^{-1}(y) = \left( \frac{y}{1-|y|} \right)^{\frac{3}{5}}$ .

graferna för  $f$  och  $f^{-1}$

(↓ nära origo)



- b)  $f$  är  $C^\infty$  på  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (ty sammansatt av  $C^\infty$ -funktioner, nämnaren  $\neq 0$ ).  
I origo gäller:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x^{\frac{5}{3}}}{1+x^{\frac{5}{3}}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{5}{3}}} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x},$$

det visar att  $f$  är deriverbar i origo med  $f'(0) = 0$ .

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{\frac{\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{5}{3}}}}{x} = \frac{5}{3} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{5}{3}}} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 0+, \quad \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \text{ saknar alltså gränsvärde då } x \rightarrow 0, \text{ det visar att } f' \text{ inte är deriverbar i origo.}$$

svar: **a)**  $f^{-1}(y) = \left(\frac{y}{1-|y|}\right)^{\frac{3}{5}}, D_{f^{-1}} = ]-1, 1[$  **b)**  $f$  är (bara) en gång deriverbar

uppg. 3

$$\begin{aligned} & x \left( 3\sqrt{x} \left( \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x - \frac{1}{2}} \right) - (4x + \sqrt{4x^2 - 1}) \right) = \\ &= \frac{x \left( 9x \left( 2x + 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \right) - (16x^2 + 8x\sqrt{4x^2 - 1} + 4x^2 - 1) \right)}{3\sqrt{x} \left( \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x - \frac{1}{2}} \right) + 4x + \sqrt{4x^2 - 1}} = [\text{ty } x > 0] \\ &= \frac{x(18x^2 + 9x\sqrt{4x^2 - 1} - 20x^2 - 8x\sqrt{4x^2 - 1} + 1)}{x \left( 3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2x}} \right) + 4 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{x\sqrt{4x^2 - 1} - 2x^2 + 1}{3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2x}} \right) + 4 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{x^2(4x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2}{(x\sqrt{4x^2 - 1} + 2x^2 - 1) \left( 3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2x}} \right) + 4 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \\ &= \frac{3x^2 - 1}{x^2 \left( \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{1}{x^2} \right) \left( 3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2x}} \right) + 4 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \\ &= \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{\left( \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{1}{x^2} \right) \left( 3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2x}} \right) + 4 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} \xrightarrow{\text{då } x \rightarrow \infty} \frac{3-0}{(2+2-0)(3+2+4+2)} = \boxed{\frac{1}{16}}. \end{aligned}$$

**uppg. 4b)** : Låt  $\varepsilon > 0$ ; välj  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{20} \right\}$ , då gäller för  $x \in \mathbb{R}$ :

$$|x - 2| < \delta \implies 0 < x < 3 \text{ och } |x^3 - 8| = |x - 2| |x^2 + 2x + 4| < \frac{\varepsilon}{20} \cdot 19 < \varepsilon.$$

vsv