

Övningskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-09-20

kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Martin Berglund, tel. 0762-721861

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Fibonaccitalen ges av $F_0 = 0, F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Visa med induktion att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$. (4p)

2. Låt $f(x) = \sqrt{x^8 + 1} + \sqrt{x^6 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - 3$.

a) Hur många reella lösningar har ekvationen $f(x) = 1$? (4p)

b) Motivera varför gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ existerar och beräkna det. (3p)

3. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{1 + |x|}$ med $D_f = \mathbb{R}$.

a) Är f kontinuerlig? I vilka punkter är f deriverbar? Motivera väl! (4p)

b) På vilka intervall är f växande resp. avtagande (derivata får ej användas)? (3p)

c) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter (derivata får ej användas). (4p)

4. a) Låt $M = [0, 2]$ och $N =]1, 3[$. Bestäm $M \times N$ och $N \times M$. (2p)

b) Visa att om två funktioner $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ har ett gränsvärde då x går mot a ($a \in \mathbb{R}$) så har även $f + g$ ett gränsvärde då x går mot a . (6p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-09-22**kl. 8.30-10.30 i V****Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Bernhard Behrens, tel. 0768-681630**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Talföljden a_n definieras genom $a_1 = 1$ och $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ för $n \geq 2$.

Visa att $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ där F_n är Fibonaccitalen som ges av

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ och } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ för } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4p)$$

2. Funktionen $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ med $D_f = \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(0) = 0 \text{ och } f(x) = \frac{1}{x} \left(\sqrt{\sqrt{1+x^4} + x^2} - \sqrt{\sqrt{1+x^4} - x^2} \right) \text{ för } x \neq 0.$$

d) Är f kontinuerlig? Motivera väl! (3p)

e) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (4p)

3. Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{|x^2 - x^{-2}|}$ med $D_f =]0, \infty[$.

a) Är f deriverbar? Motivera väl! (5p)

b) Funktionen g definieras genom $D_g = [1, \infty[$ och $g(x) = f(x)$ för $x \in D_g$.

Visa (utan att använda derivata) att g är injektiv och bestäm g^{-1} . (6p)

4. c) Låt $M = [0, 2]$ och $N =]1, 3[$. Bestäm $M \cap N$, $M \cup N$ och $M \setminus N$ (1p var). (3p)

d) Vilket samband finns det mellan kontinuitet och deriverbarhet?
Bevisa dina påståenden, motivera väl! (5p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-09-23**kl. 8.30-10.30 i V****Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Bernhard Behrens, tel. 0768-681630**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; visa att för alla $N \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=0}^N kx^k = \frac{Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x}{(1-x)^2}$. (6p)

2. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{|x^4 - 1|}}{x^2 + 1}$ med $D_f = \mathbb{R}$.

c) Är f deriverbar? (3p)

d) Funktionen g definieras genom $D_g = [1, \infty[$ och $g(x) = f(x)$ för $x \in D_g$.

Visa (utan att använda derivata) att g är injektiv och bestäm g^{-1} . (7p)

e) Bestäm värdemängden V_f . (5p)

3. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definiera följande begrepp (vissa är nonsens, motivera varför):

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. (2p)

b) f är kontinuerlig i a . (1p)

c) f är deriverbar i a . (2p)

d) f är injektiv i a . (1p)

e) f är kontinuerlig på $[a, b]$. (1p)

f) f är deriverbar på $[a, b]$. (1p)

g) f är injektiv på $[a, b]$. (1p) (9p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningsskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-09-17
kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
 Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Betrakta påståendet $P(n): \sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln(n^4 - n^2)$.

a) Visa att om $P(n_0)$ är sant för något $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 3$, så är även $P(n_0 + 1)$ sant. (3p)

b) Är $P(n)$ sant för alla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$? (t.ex.: gäller $P(2005)$?).

Om inte, hitta den korrekta formeln för $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = ?$ och visa att den gäller

för alla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ (och därmed att $P(2005)$ är falskt). (3p)

2. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1} \quad \text{för } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \text{och} \quad f(-1) = A, f(1) = B.$$

Kan A resp. B väljas så att f blir kontinuerlig i -1 resp. i 1 ? (4p)

3. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x-2}}$.

a) Motivera (utan att använda derivata) varför f är injektiv och bestäm f^{-1} (glöm ej att ange D_f och $D_{f^{-1}}$). (7p)

b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \sqrt{x-2})$. (4p)

4. a) Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Visa att om f är strängt monotont på $[a, b]$ så är f injektiv på $[a, b]$. (2p)

b) Visa att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. (4p)

c) Visa att $\sqrt{3}$ inte är ett rationellt tal. (3p)

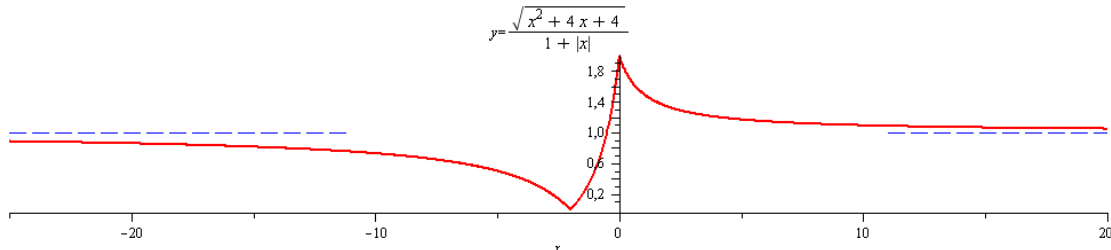
7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

SVAR 08-09-20:

2a) 2 b) $f'(0) = 0$ 3a) f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$, deriverbar på $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

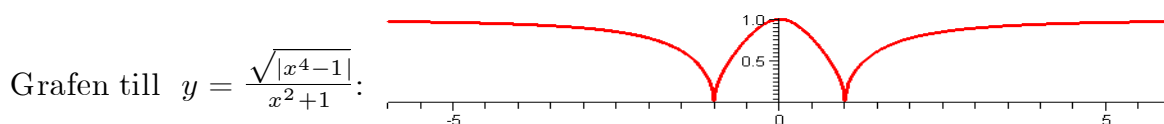
3b) f är växande på $[-2, 0]$, avtagande på $]-\infty, -2]$ och på $[0, \infty[$ ($y = 1$ är asymptot)

**SVAR 07-09-22:**

2a) ja, 2b) $-\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{2}$, 3a) nej (ej deriverbar i 1) 3b) $g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{y^4 + 4} + y^2)}$
(lösningar finns sid. 6–8)

SVAR 06-09-23:

2) svar: a) inte i ± 1 b) $g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}}$, $0 \leq y < 1$ c) $V_f = [0, 1]$



3) Nonsens är

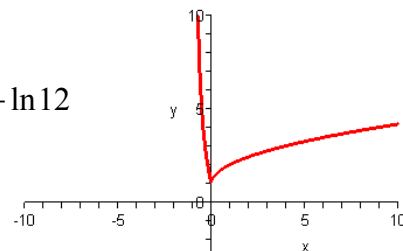
d): vi har definierat "injektiv" på ett intervall (det krävs ju minst 2 punkter!)

f): "deriverbar i $[a, b]$ " innebär ju "deriverbar i varje punkt $x_0 \in [a, b]$ ", och då måste x_0 vara inre punkt i $[a, b]$, men a och b är inte inre punkter!

SVAR 05-09-17:

1. Den korrekta formeln är $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln(n^4 - n^2) - \ln 12$

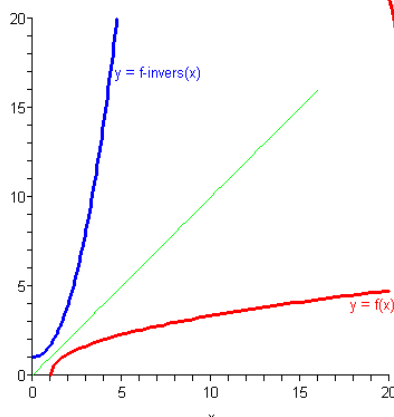
2. Nej (med $B = 2$ blir f kontinuerlig i 1, men A kan ej väljas så att f blir kontinuerlig i -1)



3. a) $D_f = [1, \infty[$, $V_f = D_{f^{-1}} = [0, \infty[$,

$$f^{-1}(y) = \frac{5}{2} + y^2 - \sqrt{\frac{9}{4} + y^2} \quad (y \geq 0)$$

b) $\frac{1}{2}$



LÖSNINGAR till övningsskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-09-22

Uppgift 1

Talföljden a_n definieras genom $a_1 = 1$ och $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ för $n \geq 2$. Visa att $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ där $F_0 = 0, F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Fibonaccitalen).

Vi gör ett induktionsbevis:

I. $n=1$: $a_1 = 1 = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1}$ är ok.

II. Föruts.: $a_p = \frac{F_p}{F_{p+1}}$ för $1 \leq p \leq m_0$ för något $m_0 \in \mathbb{N}$.

Påst.: $a_{m_0+1} = \frac{F_{m_0+1}}{F_{m_0+2}}$.

Bevis: $a_{m_0+1} = \frac{1}{1+a_{m_0}} \stackrel{[\text{förets.}]}{=} \frac{1}{1+\frac{F_{m_0}}{F_{m_0+1}}} = \frac{F_{m_0+1}}{F_{m_0+1}+F_{m_0}} = \frac{F_{m_0+1}}{F_{m_0+2}}$. vsv

III. Induktionsaxiomet ger då att $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

Anmärkning: Följden $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ är ett berömt exempel på "kedjebråk" (med bara ettor!):

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{1+1}; a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}; a_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}; a_5 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} \text{ osv..}$$

Kolla gärna:

	$a_1 = 1 = \frac{F_1}{F_2}$
$a_2 = \frac{1}{1+a_1}$	$a_2 = \frac{1}{2} = \frac{F_2}{F_3}$
$a_3 = \frac{1}{1+a_2}$	$a_3 = \frac{2}{3} = \frac{F_3}{F_4}$
$a_4 = \frac{1}{1+a_3}$	$a_4 = \frac{3}{5} = \frac{F_4}{F_5}$
$a_5 = \frac{1}{1+a_4}$	$a_5 = \frac{5}{8} = \frac{F_5}{F_6} \dots$

Denna följd konvergerar mot det gyllene snittet φ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\phi} = \varphi \text{ (se [Ö] fib 18)!}$$

Uppgift 2

$f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{1}{x}(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2} - \sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2})$ för $x \neq 0$.

a) f är kontinuerlig i varje punkt $a \neq 0$ ty f är sammansatt av kontinuerliga funktioner,

$D_f = \mathbb{R}$ ty $\sqrt{1+x^4} - x^2 > 0$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4}+x^2 - (\sqrt{1+x^4}-x^2)}{x(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2} + \sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x(\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2} + \sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{2}{\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2} + \sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}} = 0 \cdot \frac{2}{2} = 0, \text{ alltså } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0), \text{ dvs. } f \text{ är}\end{aligned}$$

kontinuerlig även i 0 och därmed på hela $\mathbb{R}$.

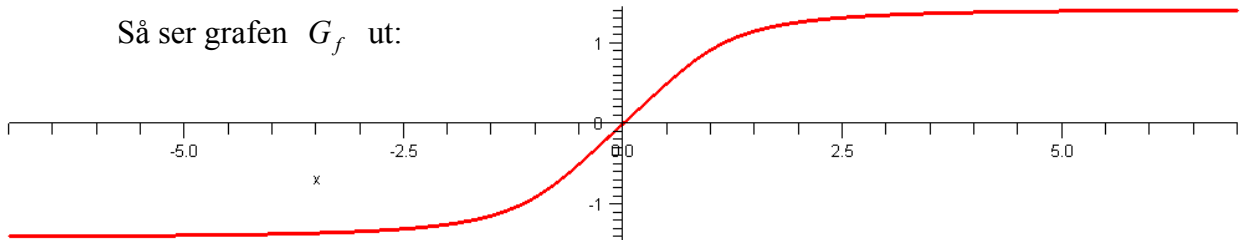
b) Då $x \rightarrow \pm\infty$ har vi (observera $\sqrt{x^2} = |x|$!)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+1} - \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}-1} & \text{då } x > 0 \\ -\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+1} + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}-1} & \text{då } x < 0 \end{cases}, \text{ alltså är}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\sqrt{\sqrt{0+1}+1} + \sqrt{\sqrt{0+1}-1} = -\sqrt{2} + 0$, ty $\sqrt{\cdot}$ är en kontinuerlig funktion, och
p.s.s. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{2} - 0$.

svar: a) ja b) $-\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{2}$

Så ser grafen G_f ut:



Uppgift 4a)

$M = [0, 2]$ och $N =]1, 3[$; då är (RITA!!)

$$M \cap N = \{x : x \in M \wedge x \in N\} = \{x : 1 < x \leq 2\} =]1, 2],$$

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} = \{x : 0 \leq x < 3\} = [0, 3[\text{ och}$$

$$M \setminus N = \{x : x \in M \wedge x \notin N\} = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1].$$

Uppgift 3

- a) Alla punkter i D_f är inre punkter i D_f , f är deriverbar i alla punkter $1 \neq a \in D_f$ ty f är sammansatt av funktioner som är deriverbara i sådana punkter. Vi skall nu kolla om $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ har ett gränsvärde då x går mot 1: vi börjar med högergränsvärdet, dvs. vi betraktar $x > 1$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^{-2}} = \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}}{x}, \text{ alltså gäller}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x + 1}\sqrt{x - 1}}{x(x - 1)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x + 1}}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1+} \infty \text{ ty}$$

$$\sqrt{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1+} 0+$$

$$(\sqrt{} \text{ är kontinuerlig}), \text{ alltså } \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1+} \infty \text{ och } \frac{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x + 1}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1+} 2.$$

Det visar att $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow 1$, dvs. f är ej deriverbar i 1.

- b) $g(x) = \sqrt{x^2 - x^{-2}}$ är strängt växande och därmed injektiv på $[1, \infty[$, ty x^2 är str. växande, x^{-2} str. avtagande, alltså $-x^{-2}$ str. växande och då är summan $x^2 - x^{-2}$ och därmed $\sqrt{x^2 - x^{-2}}$ str. växande. För att beräkna inversen till g måste vi först bestämma $D_{g^{-1}} = V_g$:

För $x \geq 1$ är $g(x) \geq g(1) = 0$ (ty g är växande), vidare ser vi att

$$g(x) = \sqrt{x^2 - x^{-2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad (x^{-2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0), \text{ s.o.m.v. ger då att } g \text{ antar alla värden } \geq 0$$

(g är kontinuerlig), dvs. $V_g = [0, \infty[$; nu löser vi ekvationen $y = g(x)$ för

$$y \in D_{g^{-1}}, \text{ dvs. } y \geq 0:$$

$$y = \sqrt{x^2 - x^{-2}} \Leftrightarrow y^2 = x^2 - x^{-2} \Leftrightarrow x^4 - x^2 y^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2 - \frac{1}{2} y^2) = \frac{y^4 + 4}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2 + \sqrt{y^4 + 4}}{2}$$

$$(\frac{y^2 - \sqrt{y^4 + 4}}{2} \text{ går ej ty } x^2 \geq 1 \geq 0) \Leftrightarrow_{x \geq 0} x = g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{y^4 + 4} + y^2)}.$$

svar: a) nej (ej deriverbar i 1) **b)** $g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{y^4 + 4} + y^2)}$

Så ser graferna ut:

