

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-10-27, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Martin Berglund, tel. 0762 – 721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Bestäm gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sinh \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{\frac{1}{x}}$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sinh \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. (3p var) (9p)

2. Låt $f(x) = 2x - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.
 - a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet och värdemängden V_f . (7p)
 - b) Är integralen $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (3p)

3. Bestäm a så att kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cosh t - t, \cosh t + t)$, $-a \xrightarrow{t} a$ har längden 4. (6p)

4. a) Visa att $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$ för alla $x > 0$. (4p)
 - b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ på $]0, \infty[$ och avgör med hjälp härav om $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent eller divergent. (6p)
 - c) Visa att $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ är injektiv på $]0, \infty[$ och beräkna $Dh^{-1}(2)$. (4p)

5. Låt $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$.
 - a) Är f deriverbar i origo? Är f' kontinuerlig i origo? Motivera väl! (5p)
 - b) Visa att f har ett strängt lokalt minimum i origo, men att f inte är avtagande i något intervall $]-\varepsilon, 0[$ och inte växande i något intervall $]0, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$). (4p)

6. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).
Visa att om $f'(x) = 0$ för varje $x \in]a, b[$ så är f konstant på $]a, b[$. (5p)

7. Visa att om en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) så är f integrerbar över $[a, b]$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-01-15, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Micke Persson, tel. 0762 – 721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. a) Visa med induktion att $(1+x)^n > 1+nx$ för alla $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 \neq x \in [-1, \infty[$. (5p)

b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) genom att använda binomialteoremet. (4p)

2. Låt $f(x) = |\sin x| e^{\cos x}$.

a) Är f deriverbar i origo? (3p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och inflexionspunkter. (6p)

c) Beräkna arean av området $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (4p)

3. Beräkna längden av kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (2t - \sin(2t), 4 \sin(t), \cos(2t)), 0 \xrightarrow{t} 2\pi$. (6p)

4. Beräkna volymen av den rotations kropp som uppkommer då området

$\{(x, y) : \ln(2) \leq x, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{\sinh x}}\}$ roterar ett varv kring x -axeln. (7p)

5. Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}\right) + \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2}$ på $]0, \infty[$ (6p)

och avgör om $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent eller divergent (4p). (10p)

6. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $]a, b[\subseteq D_f$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

a) Visa att om f är strängt avtagande på $]a, b[$ så är f injektiv på $]a, b[$. (2p)

b) Visa att om f är deriverbar på $]a, b[$ och $f'(x) < 0$ för varje $x \in]a, b[$ så är f strängt avtagande på $]a, b[$. Gäller omvändningen? (6p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-08-21, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Aron Lagerberg, tel. 0762 – 721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ för

a) $f(x) = x^{x \ln x}$ b) $f(x) = x^{(x \ln x)}$ c) $f(x) = (-\ln x)^x$. (6p)

2. Låt $f(x) = \frac{x \sinh(x) - \cosh(x)}{(\cosh(x))^2}$.

a) Visa att f har ett nollställe i $]1, \frac{3}{2}[$. Hur många nollställen har f ? (5p)

b) Visa att $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent utan att beräkna en primitiv funktion till f . (4p)

c) Beräkna $\int_0^\infty f(x) dx$ (tips: integrera partiellt $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx \dots$). (4p)

3. Låt $f(x) = \arcsin x + x(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}$.

a) Visa att f är injektiv och ange $Df^{-1}(\frac{\pi}{4})$. (5p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)

c) Är $|f|$ deriverbar i origo? (3p)

d) Beräkna arean av området mellan kurvan $y = |f(x)|$ och linjen $y = \frac{\pi}{2}$. (7p)

4. a) Visa att $\frac{2x}{\pi} < \sin x$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$. (4p)

b) Visa Jordans lemma: För $A > 0$ gäller $\int_0^\pi e^{-A \sin x} dx < \frac{\pi}{A}$.

[ledning: visa först med hjälp av a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx < \frac{\pi}{2A}$ (3p) ...] (6p)

5. Visa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (4p)

6. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Langranges sats). (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2008-10-23, kl. 8.30-12.30 i H

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: David Witt Nyström, tel. 0762 – 721860

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

1. Låt $f(x) = x \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (3p) och $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$ (2p). (5p)

b) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $\left(\frac{1}{\ln 2}, f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right)$. (3p)

2. Låt $f(x) = \arccos x - \arctan x$.

a) Visa att f är injektiv, bestäm D_f , V_f och $Df^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (4p)

b) Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av x -axeln, y -axeln och kurvan $y = f(x)$ (3p för beräkning av nollstället $x_0 : f(x_0) = 0$). (7p)

3. Låt $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

a) Visa att f är injektiv och beräkna f^{-1} . (4p)

b) Är $f \in C^1$? Är $f \in C^2$? Motivera väl! (5p)

c) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (3p)

4. Beräkna längden av kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t}\right)$, $1 \leq t \leq 3\sqrt{11}$. (6p)

5. Låt $f(x) = \frac{\ln(x) \arctan\left(\frac{1}{1-\sin(x)}\right)}{x\sqrt{x}}$.

a) Är den generaliserade integralen $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergent eller divergent? (5p)

b) Bestäm $\inf\{f(n) : 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$. (4p)

6. a) Definiera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. (2p)

b) Visa $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. (2p)

c) Definiera $\binom{n}{m}$ ($m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$). (2p)

7. Visa att för en funktion f som är deriverbar i $]a, b[$ gäller:

$f'(x) \geq 0$ för alla $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ är växande på $]a, b[$ (obs: det är 2 påståenden!). (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2009-01-17, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Christoffer Cromvik, tel. 0762 – 721860

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

- =====
1. Beräkna koefficienten för $(xyz)^3$ i utvecklingen av $(x + y + z)^9$. (5p)

 2. Låt $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$.
 - a) Ange D_f , visa att f är injektiv och bestäm V_f . (4p)
 - b) Bestäm tangenten till kurvan $y = f(x)$ i origo och $Df^{-1}(2)$. (5p)

 3. Låt $f(x) = (\sqrt{x^2 - 1})^{-3}$.
 - a) Bestäm en primitiv funktion till f på $]1, \infty[$. (4p)
 - b) Avgör om $\int_1^2 f(x) dx$ resp. $\int_2^\infty f(x) dx$ är konvergent eller divergent. (4p)

 4. Låt $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ och $f(x) = |1 - x| x^{\frac{x}{1-x}}$ för $1 \neq x \in]0, \infty[$.
 - a) Visa att f är kontinuerlig (på $[0, \infty[$!). (5p)
 - b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (8p)

 5. Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{1}{\sinh(x) \sinh(\frac{1}{x})}$ för $0 \neq x \in \mathbb{R}$.
 - a) Är f deriverbar? Existerar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$? Motivera väl! (5p)
 - b) Är $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (5p)

 6. Definiera funktionen $\arctan x$ och härled dess derivata. (5p)

 7. Visa att om $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar och antar i x_0 ett lokalt minimum så är $f'(x_0) = 0$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2009-08-20, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Fredrik Lindgren, tel. 0762 – 721861

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt.

=====

1. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ för $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$. (2p var) (6p)
2. Visa att $\arctan(\sinh(x)) = \arcsin(\tanh(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (4p)
3. Beräkna längden av kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (2t, t^2 \sin t, t^2 \cos t)$, $-\pi \xrightarrow{t} \pi$. (5p)
4. Låt $f(x) = \frac{\arctan x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}$. Avgör om $\int_0^{\infty} f(x) dx$ är konvergent eller divergent
 - a) utan att beräkna en primitiv funktion till f . (4p)
 - b) genom att beräkna en primitiv funktion till f . (5p) (9p)
5. Låt $f(x) = (2 - \cos x)\sqrt{1 + \cos x}$.
 - a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ för $x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (7p)
 - b) Beräkna arean av området $\{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (6p)
 - c) Är f deriverbar i π ? (4p)
6. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion som är deriverbar på $]a, b[\setminus \{x_0\}$, $x_0 \in]a, b[\subseteq D_f$. Bevisa eller motbevisa följande påståenden:
 - a) Om $f'(x)$ har ett gränsvärde då x går mot x_0 så är f deriverbar i x_0 . (2p)
 - b) Om f är kontinuerlig och $f'(x)$ har ett gränsvärde då x går mot x_0 så är f deriverbar i x_0 . (4p)
7. Visa att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$. (6p)
8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två (obs!) funktioner. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

SVAR

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, 07-09

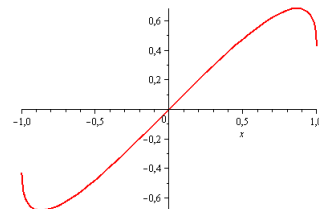
07-10-27

1) 0 resp. e resp. 1 2a) konvex i $[-1, 0]$, konkav i $[0, 1]$,

$V_f = [\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}]$ b) konvergent 3) $a = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

4b) $x \ln(1 + \frac{1}{x})$, konvergent c) $\frac{1}{2 \ln 2 - 1}$

5a) f är deriverbar i origo men f' är ej kontinuerlig i origo

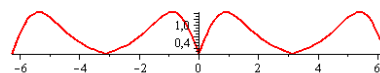


08-01-15

1b) $\frac{n(n-1)}{2}$ 2a) nej b) minimipunkter är $k\pi$,

maximipunkter är $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi$, inflexionspunkter är $\frac{\pi}{2} + k\pi$ c) $4 \sinh 1$

3) 8π 4) $\pi \ln 3$ 5) $x \ln \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}$

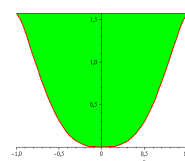
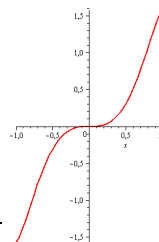


08-08-21

1a) 1 b) 0 c) 1 2a) 2 c) 0

3a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) konkav på $]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$ och på $[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1]$,

konvex på $[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}]$ och på $[0, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ c) ja d) $\frac{32}{15}$

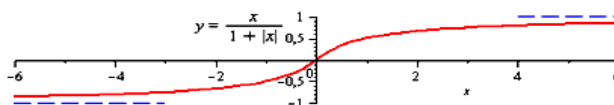


08-10-23

1a) 1 resp. 0 b) $(11 \ln 2 - 3 \ln 3)x + 3y = 5$

2a) $D_f = [-1, 1]$, $V_f = [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, $Df^{-1}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ b) $1 + \ln \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

3a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $x \in [-1, 1]$ b) f är C^1 , inte C^2 c) f är konvex på $]-\infty, 0]$, konkav på $[0, \infty[$,
asymptoter $y = \pm 1$



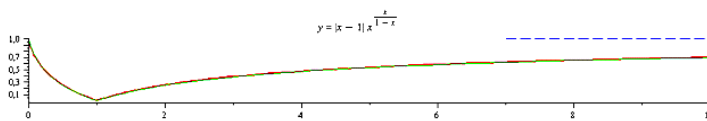
4) $\ln(3\sqrt{22} + 10\sqrt{2} - 3\sqrt{11} - 10) + \frac{33\sqrt{2} - 10\sqrt{11}}{33}$ 5a) konvergent b) 0

09-01-17

1) 1680 2a) $D_f = [-1, 1[$, $V_f = [-\frac{1}{2}, \infty[$ b) $y = \frac{2}{\pi}x$, $Df^{-1}(2) = \frac{\pi}{36}$

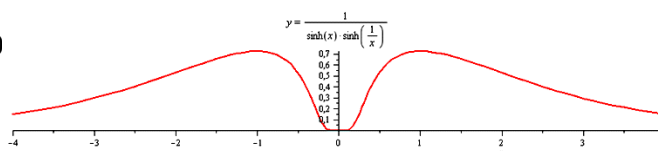
3a) $\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$ b) divergent resp. konvergent

4b) $\max = 0$, $\min = 1$,
asymptot $y = 1$



5a) f är deriverbar, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

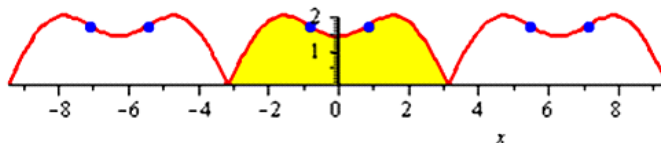
b) konvergent



09-08-20

1) 0 resp. $\frac{1}{e}$ resp. 1 3) $4\pi + \frac{2\pi^3}{3}$ 4) konvergent ($= \frac{\pi}{2}$) 5a) maxpunkter: $\frac{\pm\pi}{2}$, minpunkter: $\pm\pi$,
 lokal minpkt.: 0, f är konvex på $[-\alpha, \alpha]$, konkav på $[-\pi, -\alpha]$ och på $[\alpha, \pi]$ med $\alpha = \arccos \frac{2}{3}$,

b) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ c) nej



6a) falskt, motex.: $f(x) = \text{sgn}(x)$ b) sant, f är deriverbar även i x_0 :

betrakta differenskvoten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ($x_0 \neq x \in]a, b[$)
 för $x < x_0$:

MVS gäller enligt förutsättningarna för intervallet $[x, x_0]$ och ger:

det finns ett $\xi_x \in]x, x_0[$ så att $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_x)$, eftersom $f'(x)$ har ett
 gränsvärde då $x \rightarrow x_0$ och $\xi_x \rightarrow x_0^-$ då $x \rightarrow x_0^-$ [$x < \xi_x < x_0$] så gäller

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Analogt för $x > x_0$:

MVS gäller för intervallet $[x_0, x]$ och ger:

det finns ett $\eta_x \in]x_0, x[$ så att $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\eta_x)$ och då gäller

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(\eta_x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \quad (\eta_x \rightarrow x_0^+ \text{ då } x \rightarrow x_0^+),$$

alltså existerar $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. vsv