

INSTUDERINGSUPPGIFT 3 (tillämpning av derivata) (lösning)

A) Visa att $f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right)$ (instuderingsuppgift 2) är injektiv på $] -\infty, 0[$ och injektiv på $] 0, \frac{1}{2}]$ och ange V_f .

B) Låt $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$.

a) Visa att f är kontinuerlig på $[0, \infty[$.

b) Visa att f är injektiv på $[1, \infty[$.

c) Är f injektiv på $] 0, 1[$?

C) Låt $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$.

a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?

b) Visa att f är injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty[$.

c) Visa att f är strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty[$.

d) Låt $g(x) = f(x)$ för $x \in D_g = [\frac{2}{\pi}, \infty[$. Beräkna $D(g^{-1})\left(\frac{9}{2\pi^2}\right)$.

Extrauppgifter

5) Visa att $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$ för $0 < a < b < \pi$.

6) Visa att för positiva x gäller: $2^x < x^2 \Leftrightarrow 2 < x < 4$ (det ger t.ex. $2^e < e^2$).

7) Låt $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$, $D_f =]0, \frac{\pi}{2} [$.

Visa att f är injektiv, bestäm värdemängden V_f och $D(f^{-1})\left(\frac{3}{2\pi}\right)$.

svar: $]0, \frac{2}{\pi}[$, $\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi - \sqrt{3})}$

8) Låt $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.

Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?

Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet.

svar: f är udda, ej kontinuerlig i 0, konvex på $]0, \infty[$, $y = 0$ är asymptot, $f'(x) \rightarrow -1$ som $x \rightarrow 0$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) $D_f = \{x : x \neq 0 \wedge x \leq 1 \wedge 2x \leq 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, \frac{1}{2}]$. Eftersom f är sammansatt av kontinuerliga funktioner så är f kontinuerlig (dvs. kontinuerlig i varje $x \in D_f$!).

b) För att lättare kunna beräkna gränsvärdena skriver vi om f (ändamålsenligt):

$$f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right) = \frac{\sqrt{1-x} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}}, & \text{då } x > 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{-(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}, & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

[obs: $\sqrt{x^2} = -x$ då $x < 0$!] Det ger att $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$, f saknar alltså gränsvärde

då x går mot 0. Vidare är för $x < 0$ $f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{2 - \frac{1}{1-x}}}$, det ger att

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} \quad (\text{linjen } y = 1 - \sqrt{2} \text{ är alltså asymptot då } x \rightarrow -\infty).$$

c) Vi har $g(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}}}$; på $]-\infty, 0]$ är $\frac{1}{x-1}$ str. avtagande, alltså är $2 + \frac{1}{x-1}$ och därmed

$1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}}$ str. avtagande, detta visar att g är str. avtagande och därmed injektiv. Vidare är

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 - \sqrt{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\frac{1}{2}, \quad g \text{ är kontinuerlig, s.o.m.v. ger då att } V_g =]-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}[$$

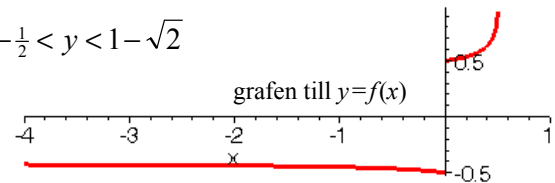
[obs: $1 - \sqrt{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$]. Beräkning av g^{-1} : för $y \in V_g$ gäller

$$y = g(x) \Leftrightarrow \frac{-1}{y} = 1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow -\frac{1+y}{y} = \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \frac{1+y^2+2y}{y^2} = 2 + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1+2y-y^2}{y^2} \Leftrightarrow$$

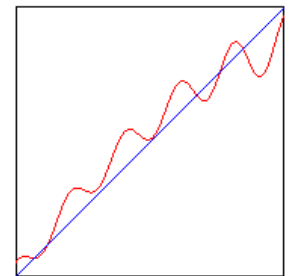
$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{y^2}{1+2y-y^2} \Leftrightarrow x = \frac{1+2y}{1+2y-y^2} = g^{-1}(y). \quad \text{ANM: vi kan nu ange } V_g \text{ även så här:}$$

$$x < 0 \Leftrightarrow \frac{1+2y}{1+2y-y^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2(y+\frac{1}{2})}{(y-1)^2-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(y+\frac{1}{2})}{(y-1-\sqrt{2})(y-1+\sqrt{2})} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < y < 1 - \sqrt{2}$$

(gör teckentabell!).

**Lösningsförslag till extrauppgift 3**

Åskådligt är det klart: eftersom f är kontinuerlig och $0 \leq f(x) \leq 1$ så borde väl kurvan $y = f(x)$ någonstans korsa linjen $y = x$. Ett strängt bevis för det får vi t.ex. så här: om $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ så är vi färdiga (0 eller 1 är då fixpunkt); om $f(0) \neq 0$ och $f(1) \neq 1$ så gäller för funktionen $g(x) = f(x) - x$: g är kontinuerlig på $[0, 1]$, $g(0) > 0$ och $g(1) < 0$, värdet 0 ligger mellan värdena $g(0)$ och $g(1)$, enligt satsen om mellanliggande värden finns det då ett $x_0 \in]0, 1[$ (i själva verket $x_0 \in]0, 1[$) där g antar värdet 0, dvs. $f(x_0) = x_0$.



vsv