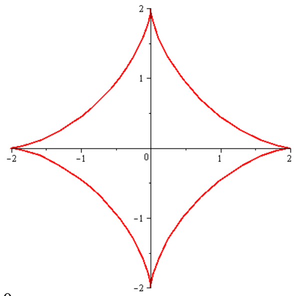
ÖVNINGSUPPGIFTER TILL INTEGRAL MED LÖSNINGAR



1) Beräkna arean av området D innanför asteroiden $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=a\left(\cos^3(t),\sin^3(t)\right),\ 0\le t\le 2\pi \quad (a>0)$.

Lösning:

P.g.a. symmetrin är arean

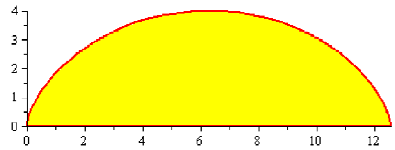
$$m(D)=4\int_0^a y(x)\,dx=\begin{bmatrix} x=a\cos^3(t),\ dx=-3a\cos^2(t)\,dt \\ y=a\sin^3(t)\end{bmatrix}=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3(t)(-3a)\cos^2(t)\,dt=$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1-\cos(2t)}{2}\cdot\tfrac{(\sin(2t))^2}{4}dt=$$

$$=\tfrac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\tfrac{1-\cos(4t)}{2}-(\sin(2t))^2\cos(2t)\right)dt=\tfrac{3a^2}{2}\left[\tfrac{t}{2}-\tfrac{\sin(4t)}{8}-\tfrac{\sin^3(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\tfrac{3a^2\pi}{8}}.$$

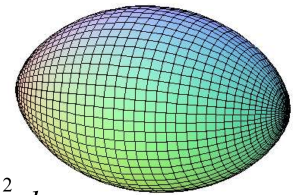
2) Beräkna volymen av den Kropp K som alstras då området mellan x-axeln och cykloidbågen $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=a(t-\sin t,1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi \quad (a>0)$ roterar

a) kring x-axeln **b**) kring y-axeln.



Lösning:

a) Volymen vid rotation kring x-axeln är

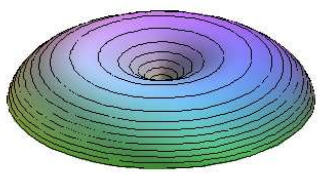


$$m(K)=\pi\int_0^{2\pi a}(y(x))^2\,dx=\begin{bmatrix} x=a(t-\sin t),\ dx=a(1-\cos t)\,dt \\ y=a(1-\cos t)\end{bmatrix}=$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,a(1-\cos t)\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)^2 dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1+\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\cos(2t)-\cos t\left(4-\sin^2 t\right)\right)^2 dt=\pi a^3\left[\tfrac{5t}{2}+\tfrac{3\sin(2t)}{4}-4\sin t+\tfrac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}=\boxed{5a^3\pi^2}.$$

b) Volymen vid rotation kring y-axeln är



$$m(K)=2\pi\int_0^{2\pi a}xy(x)\,dx=[\text{samma substitution som i } \textbf{a})]=$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt =$$

[för att kunna utnyttja "jämn/udda" gör vi substitutionen $t-\pi = u,\ dt = du$]

$$= 2\pi a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi + \underbrace{u+\sin u}_{\text{udda}}\right)\underbrace{(1+\cos u)^2}_{\text{jämn}}\,du = 4\pi^2 a^3 \int_0^{\pi} \left(1+\tfrac{1+\cos(2u)}{2}+2\cos u\right)du =$$

$$= 4\pi^2 a^3 \left[\tfrac{3u}{2} + \tfrac{\sin(2u)}{4} + 2\sin u\right]_0^{\pi} = \boxed{6\pi^3 a^3}.$$

3) Beräkna arean av den yta S som alstras då cykloidbågen
$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = a(t-\sin t, 1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi \quad (a>0)$ roterar
a) kring x-axeln **b**) kring y-axeln (S är begränsningsytan till K i uppg. 2).

lösning:

a) Arean vid rotation kring x-axeln är

$$m(S) = 2\pi \int_C y\,ds = \left[ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2(t)}\,dt \right] =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \left[\sqrt{2-2\cos t} = \sqrt{4\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)} = 2\underbrace{\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)}_{\geq 0 \text{ då } 0\leq t\leq 2\pi} \right]$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\tfrac{t}{2}\right)dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 8\pi a^2 \left[-2\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) + \tfrac{2}{3}\cos^3\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 16\pi a^2\left(2-\tfrac{2}{3}\right) = \boxed{\tfrac{64a^2\pi}{3}}.$$

b) Arean vid rotation kring y-axeln är

$$m(S) = 2\pi \int_C x\,ds = \left[ds = a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a2\left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|dt, \text{ s.o.} \right] = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)dt =$$

[för att kunna utnyttja "jämn/udda" gör vi substitutionen $t-\pi = u,\ dt = du$]

$$= 4\pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi + \underbrace{u+\sin u}_{\text{udda}}\right)\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi+u}{2}\right)}_{=\cos\left(\frac{u}{2}\right),\ \text{jämn}}du = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \pi\cos\left(\tfrac{u}{2}\right)du = 8\pi a^2\left[2\sin\left(\tfrac{u}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \boxed{16\pi^2 a^2}.$$