

Tentamen inledande matematisk analys för F1 och TM (tma970), 09-10-22

uppg.1

$C_0 = 1$ och $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. **ANM:** C_n är *Catalantalen*.

Vi skall visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$; observera att $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Bevis (med induktion):

I. $n = 1$: $C_1 = \frac{2(0+1)}{0+2} C_0 = 1 = \frac{1}{1+1} \binom{2}{1}$ är ok.

II. Föruts.: $C_p = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}$ gäller för $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m_0$ för något $m_0 \geq 1$.

Påst.: $C_{m_0+1} = \frac{1}{m_0+2} \binom{2m_0+2}{m_0+1}$.

Bevis: $C_{m_0+1} = \frac{2(2m_0+1)}{m_0+2} C_{m_0} = [\text{enligt föruts.}] = \frac{2(2m_0+1)}{m_0+2} \cdot \frac{1}{m_0+1} \binom{2m_0}{m_0} =$

$= \frac{2(2m_0+1)}{(m_0+2)(m_0+1)} \cdot \frac{(2m_0)!}{(m_0!)^2} = VL$; *HL* i påståendet är

$HL = \frac{1}{m_0+2} \binom{2m_0+2}{m_0+1} = \frac{(2m_0+2)!}{(m_0+2)((m_0+1)!)^2} = \frac{(2m_0+1)(2m_0+2)(2m_0)!}{(m_0+2)(m_0+1)^2((m_0)!)^2} =$

$= \frac{(2m_0+1)2(2m_0)!}{(m_0+2)(m_0+1)((m_0)!)^2} = VL$. vsv

III. Induktionsaxiomet ger då att $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

uppg. 2

Låt $1 < a \in \mathbb{R}$. Arealn av området $\{(x, y) : -\ln a \leq x \leq \ln a, 0 \leq y \leq \cosh x\}$ är [cosh är jämn!]

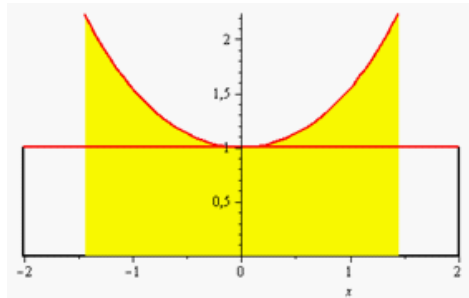
$$A = 2 \int_0^{\ln a} \cosh x dx = 2 [\sinh x]_0^{\ln a} = 2 \sinh(\ln a) = a - \frac{1}{a}.$$

Längden av kurvan $y = \cosh x$, $-\ln a \xrightarrow{x} \ln a$ är

$$L = \int_{-\ln a}^{\ln a} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_{-\ln a}^{\ln a} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = [1 + \sinh^2 \text{ är jämn}]$$

$$= 2 \int_0^{\ln a} \cosh x dx = L = a - \frac{1}{a} !$$

Arealn av rektangeln med sidorna 1 och L = arean under $y = \cosh x$:



svar: $\text{arean} = \text{längd} = \frac{a^2 - 1}{a}$

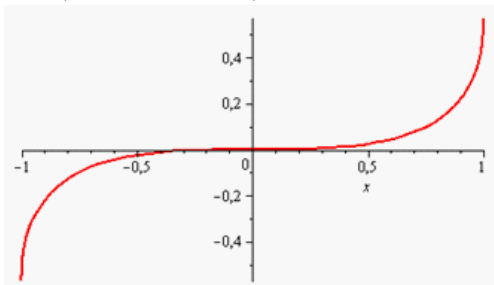
uppg. 3

a) $f(x) = \arcsin(x) - x$, $D_f = [-1, 1]$. För $0 < x < 1$ är $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 > 0$, det visar att f är strängt växande på $[-1, 1]$ (ty kontinuerlig och udda), alltså injektiv.

$Df^{-1}\left(\frac{\pi-3}{6}\right) = \frac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = \arcsin(a) - a = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$, vi ser att $a = \frac{1}{2}$,

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$, alltså är $Df^{-1}\left(\frac{\pi-3}{6}\right) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+3$.

grafen ($y = \arcsin x - x$):



b) För $0 < x \leq 1$ är $\arcsin(x) > x$ ty enligt a) är f strängt växande, alltså $f(x) = \arcsin(x) - x > 0$, eller ty $\arcsin$ är str. konvex ($\Rightarrow$ ligger ovanför tangenten $y = x$) eller ty $\sin(x) < x$ ($\Rightarrow x < \arcsin(x)$...).

Därmed har vi $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\arcsin(x)} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ för $0 < x \leq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent,

jämförelsekriteriet ger då att även $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\arcsin(x)} dx$ är konvergent.

svar: a) $Df^{-1}\left(\frac{\pi-3}{6}\right) = 3 + 2\sqrt{3}$ b) konvergent

uppg. 4

Sätt $f(x) = \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$; f är kontinuerlig även i 0 ty

$x \ln x \rightarrow 0 = f(0)$ då $x \rightarrow 0_+$, alltså existerar $\int_0^1 f(x) dx$; för $x > 1$ är

$0 \leq f(x) \leq \frac{x^2}{(0+x^2)^2} = \frac{1}{x^2}$ ty $\ln x < x$ [$g(x) = x - \ln x > g(1) = 1$ för $x > 1$ ty

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$], $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent, jämförelsekriteriet ger då att även

$\int_1^\infty f(x) dx$ är konvergent och därmed har vi att

$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx$ är konvergent. Beräkning:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = [\text{p.i.}] = -\frac{1}{2(1+x^2)} \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2)x} dx = \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln x}{1+x^2} + \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{alltså är } \int_0^{\infty} f(x) dx &= [F(x)]_0^{\infty} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \cdot \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \right) - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 \ln x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{0+1} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{0+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{0}{1} - \frac{1}{2} \cdot \ln 1 \right) = 0 \quad [\text{standardgränsvärden!}].
\end{aligned}$$

ANM: En listig lösning är det följande: Eftersom vi vet att integralen $\int_0^{\infty} f(x) dx$ är konvergent så kan vi beräkna den så här: $I = \int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx =$

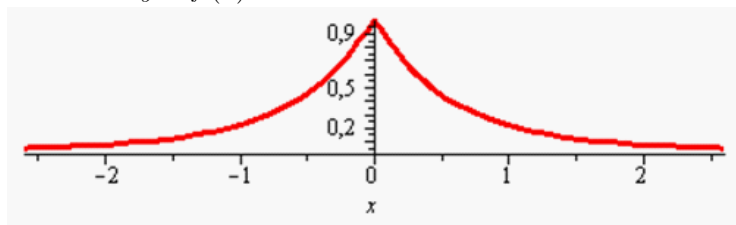
$$= \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right] = - \int_{\infty}^0 \frac{\frac{1}{t} \ln(\frac{1}{t})}{(1+\frac{1}{t^2})^2 t^2} dt = - \int_0^{\infty} \frac{t \ln(t)}{(t^2+1)^2} dt = -I \Rightarrow \underline{I = 0}.$$

svar: $\boxed{\int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx = 0}$

uppg. 5

a) Funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 - x \arctan(\frac{1}{x}) & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$ är deriverbar (och därmed kontinuerlig) i alla punkter $x \neq 0$ ty f är sammansatt av deriverbara funktioner; $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0+} (x \arctan(\frac{1}{x})) = 1 - 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0-} (x \arctan(\frac{1}{x})) = 1 - 0 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$,
alltså är f kontinuerlig även i 0.
 $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{då } x \rightarrow 0- \\ -\frac{\pi}{2} & \text{då } x \rightarrow 0+ \end{cases}$,
det visar att f inte är deriverbar i 0.

b) Observera att f är jämn, vi betraktar alltså bara $x > 0$.
Eftersom $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{\arctan t = v \rightarrow 0} \frac{v}{\tan v} = \lim_{v \rightarrow 0} (\cos v \frac{v}{\sin v}) = 1$, så är
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\frac{1}{x} = t \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{\arctan t}{t}\right) = 1 - 1 = 0$, x -axeln är alltså asymptot.
 $f'(x) = -\left(\arctan \frac{1}{x} + \frac{x}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan \frac{1}{x}$,
 $f''(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$, det visar att f' är strängt växande,
alltså att f är strängt konvex på $[0, \infty[$ (och på $]-\infty, 0]$).
Kurvan $y = f(x)$ ser ut så här:



c) Att $f(x) > 0$ vet vi från **b**): f är strängt avtagande på $[0, \infty[$ ty
 $f'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan \frac{1}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ och f' är strängt växande, alltså

$f'(x) < 0$ (dessutom $f'(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}+$ då $x \rightarrow 0_+$, se **a**). För $x > 0$ gäller:
 $f(x) < \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 1 - x \arctan \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{x} > 0$:
 $g'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(x^2-3)(1+x^2)-x^4}{x^4(1+x^2)} = \frac{-2x^2-3}{x^4(1+x^2)} < 0$, det ger att
 g är strängt avtagande och eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ så är $g(x) > 0$ för $x > 0$
(dessutom $g(x) = \frac{1}{x^2} (1 - x^2) + \arctan \frac{1}{x} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0_+$).

ANM: Ändå enklare är det att visa det ekvivalenta påståendet
 $0 < t - \arctan t < t^3$ för $t > 0$.

d) $\int_0^1 f(x) dx$ existerar ty f är kontinuerlig, $\int_1^\infty f(x) dx$ existerar ty för $x > 1$ är

$0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ (enligt **c**) och $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent (jämförelsekriteriet),

alltså är $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergent. Beräkning (först en primitiv funktion till f):

$$\begin{aligned} \underline{F(x)} &= \int \left(1 - x \arctan \frac{1}{x}\right) dx = [\text{p.i.}] = x - \left(\frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx\right) = \\ &= x - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \underline{\frac{1}{2} \left(x - x^2 \arctan \frac{1}{x} + \arctan x\right) + c}. \end{aligned}$$

Alltså är $\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0_+} F(x) =$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \arctan \frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$, ty enligt **c** är $0 < x - x^2 \arctan \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$
och instängningslagen ger då $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \arctan \frac{1}{x}\right) = 0$.

e) f är jämn och avtagande på $[0, \infty[$ (se **c**), således har vi
 $\sup \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(0)$ (= f :s största värde) och
 $\inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

svar:

a) f är C^0 , inte deriverbar **b)** f är strängt konvex på $]-\infty, 0]$ och på $[0, \infty[$

d) $\frac{\pi}{4}$ **e)** 1 resp. 0

Observera att arean mellan x -axeln och $y = f(x)$ är lika stor som arean av halva enhetscirkelskivan:

