

Tentamen inledande matematisk analys för F1 och TM (tma970), 10-01-16

uppg.1

$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ är *Catalantalen*. Vi skall visa att $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$);
vi visar $\binom{2n}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-1}$:
 $\binom{2n}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1}. \quad \text{vsv}$

uppg. 2

Sätt $f(x) = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \arctan(x)$.

Lösning 1:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{1 + (x + \sqrt{x^2+1})^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2(x^2+1+x\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)(1+x^2+x^2+1+2x\sqrt{x^2+1})} - \frac{1}{1+x^2} = \\ &= \frac{2(x^2+1+x\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)2(1+x^2+x\sqrt{x^2+1})} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = c \text{ (} f \text{ konstant på } \mathbb{R} \text{)}, \\ f(0) &= 2 \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} \text{ ger } f(x) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lösning 2:

Betrakta först $x > 0$: sätt $\alpha = \arctan(x + \sqrt{x^2 + 1})$ och $\beta = \arctan(x)$
($\Leftrightarrow \tan(\alpha) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $\tan(\beta) = x$ och $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$).

Eftersom $x + \sqrt{x^2 + 1} > 1$ så är $\alpha > \frac{\pi}{4}$, alltså $2\alpha > \frac{\pi}{2}$ och därmed

$$\begin{aligned} \tan(2\alpha) &= \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{2(x + \sqrt{x^2+1})}{1 - (x + \sqrt{x^2+1})^2} = \frac{2(x + \sqrt{x^2+1})}{-x(x + \sqrt{x^2+1})} = -\frac{1}{x} = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \\ &= \tan\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right), \text{ alltså } 2\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ och eftersom } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < 2\alpha - \beta < \pi \\ &\text{så är } k = 1 \text{ och } f(x) = 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}. \text{ Vidare gäller (fortfarande } x > 0 \text{)} \\ f(-x) &= 2 \arctan(-x + \sqrt{x^2 + 1}) - \arctan(-x) = \\ &= 2 \arctan\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) + \arctan(x) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x + \sqrt{x^2+1})\right) + \arctan(x) = \\ &= \pi - f(x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \text{ Då } f(0) = \frac{\pi}{2} \text{ är alltså } f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ för alla } x \in \mathbb{R}. \quad \text{vsv} \end{aligned}$$

uppg. 3

Funktionen $f(x) = \sqrt{2 \cos^2(2x) + \sin^2(4x)} = \sqrt{2 + \cos(4x) - \cos^2(4x)}$
är π -periodisk och jämn, det räcker alltså att studera f på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

a) Är f deriverbar i $\frac{\pi}{4}$? $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{(2 - \cos(4x))(1 + \cos(4x))} - 0}{x - \frac{\pi}{4}} =$
 $= \sqrt{\frac{2 - \cos(4x)}{1 - \cos(4x)}} \cdot \frac{4\sqrt{1 - \cos^2(4x)}}{4x - \pi} = 4\sqrt{\frac{2 - \cos(4x)}{1 - \cos(4x)}} \cdot \frac{|\sin(4x)|}{4x - \pi} = 4\sqrt{\frac{2 - \cos(4x)}{1 - \cos(4x)}} \cdot \frac{|\sin(\pi - 4x)|}{4x - \pi},$
alltså $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \rightarrow \begin{cases} -4\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ då } x \rightarrow \frac{\pi}{4}^- \\ 4\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ då } x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+ \end{cases}$, dvs f är inte deriverbar i $\frac{\pi}{4}$.

b) För $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ (0 och $\frac{\pi}{2}$ är inre punkter i $D_f = \mathbb{R}$) är

$$f'(x) = \frac{-4 \sin(4x) + 8 \cos(4x) \sin(4x)}{2\sqrt{2+\cos(4x)-\cos^2(4x)}} = \frac{4 \sin(4x)(\cos(4x)-\frac{1}{2})}{\sqrt{2+\cos(4x)-\cos^2(4x)}},$$

$f'(x) = 0$ för $x \in \{0, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\}$ ($\frac{\pi}{2}$ egentligen onödigt), teckentabell för f' :

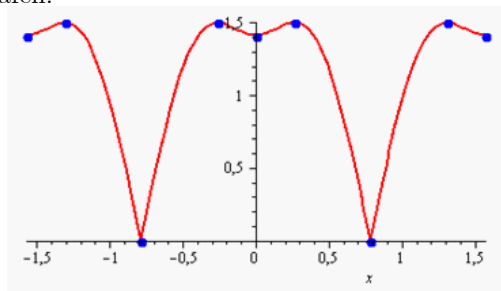
x	0	$]0, \frac{\pi}{12}[$	$\frac{\pi}{12}$	$] \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}[$	$\frac{\pi}{4}$	$] \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}[$	$\frac{5\pi}{12}$	$] \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin 4x$	0	+	+	+		-	-	-	0
$\cos 4x - \frac{1}{2}$	+	+	0	-		-	0	+	+
f'	0	+	0	-	?	+	0	-	0
f	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Tabellen visar:

f antar ett lokalt minimum i 0 (och i $\frac{\pi}{2}$) ($f(0) = \sqrt{2}$) och i $\frac{\pi}{4}$ ($f(\frac{\pi}{4}) = 0$),

f antar ett lokalt maximum i $\frac{\pi}{12}$ och i $\frac{5\pi}{12}$ ($f(\frac{\pi}{12}) = f(\frac{5\pi}{12}) = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$).

Grafen:

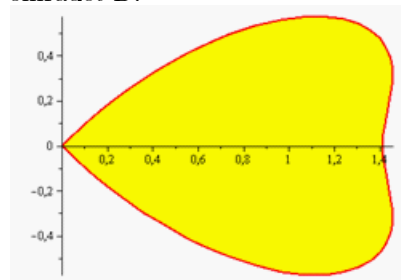


c) Området $D : \begin{cases} 0 \leq r \leq f(\varphi) \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ ((r, φ) polära koordinater) har arean

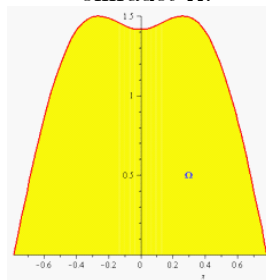
$$m(D) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(\varphi))^2 d\varphi = [f \text{ är jämn}] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos^2(2\varphi) + \sin^2(4\varphi)) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(4\varphi) + \frac{1}{2}(1 - \cos(8\varphi))) d\varphi = \left[\frac{3}{2}\varphi + \frac{\sin(4\varphi)}{4} - \frac{\sin(8\varphi)}{16} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{8}.$$

området D:



området Ω :



Anm: $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 \cos^2(2x) + \sin^2(4x)} dx$ är arean av området Ω mellan x -axeln

och $y = f(x)$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ (något helt annat!), kan beräknas (bra övning!):

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \sqrt{2 + 4 \sin^2(2x)} dx = \int_0^1 \sqrt{2 + 4t^2} dt = \dots$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{2}\sqrt{3} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})) \quad (\text{do it!}).$$

svar: **a)** nej **b)** extrempunkter i $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{12}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{12}$ **c)** $\frac{3\pi}{8}$

uppg. 4

$$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}, \quad D_f =]0, \infty[, \quad f \text{ är } C^\infty.$$

a) $f'(x) = -\frac{1+\ln^2(x)+2\ln(x)}{x^2(1+\ln^2(x))^2} = -\frac{(1+\ln x)^2}{x^2(1+\ln^2(x))^2} < 0$ för $0 < x \neq \frac{1}{e}$, det visar att f är strängt avtagande på $]0, \frac{1}{e}]$ och på $[\frac{1}{e}, \infty[$, f är kontinuerlig, f är alltså injektiv (på $D_f =]0, \infty[$), $\frac{1}{e}$ är en terrasspunkt.

Asymptoter är y -axeln, ty $f(x) = \frac{1}{x+x\ln^2(x)} \rightarrow \infty$ (ty $x\ln^2(x) \rightarrow 0$) då $x \rightarrow 0_+$ och x -axeln, ty $f(x) = \frac{1}{x+x\ln^2(x)} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.

$$f''(x) = -\frac{2(1+\ln x)x(1+\ln^2(x))^2 - (1+\ln x)^2(2x(1+\ln^2(x))^2 + 2x(1+\ln^2(x))2\ln x)}{x^4(1+\ln^2(x))^4} =$$

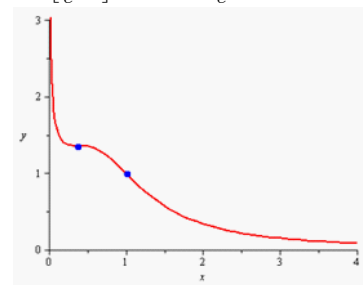
$$= -\frac{2(1+\ln x)(1+\ln^2(x)) - (1+\ln x)(1+\ln^2(x)+2\ln x)}{x^3(1+\ln^2(x))^3} =$$

$$= -\frac{2(1+\ln x)(1+\ln^2 x - (1+3\ln^2 x + 3\ln x + \ln^3(x)))}{x^3(1+\ln^2(x))^3} = \frac{2(1+\ln x)\ln x(3+2\ln x + \ln^2(x))}{x^3(1+\ln^2(x))^3}.$$

Teckentabell för f'' ($3 + 2\ln x + \ln^2(x) = (\ln x + 1)^2 + 2 > 0$):

x	$]0, \frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$[\frac{1}{e}, 1[$	1	$]1, \infty[$
$\ln x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1 + \ln x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

Tabellen visar att f är strängt konvex på $]0, \frac{1}{e}]$ och på $[1, \infty[$, strängt konkav på $[\frac{1}{e}, 1]$ och att $\frac{1}{e}$ och 1 är inflexionspunkter.



b) $\int_0^\infty \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx = [\arctan(\ln x)]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(\ln x) - \lim_{x \rightarrow 0_+} \arctan(\ln x) =$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \quad [\text{observera att linjen } x = 1 \text{ delar området mellan } x\text{-axeln och } y = f(x) \text{ i två delar med lika stor area!}].$$

svar:

a) asymptoter: $x = 0, y = 0$; konvex i $]0, \frac{1}{e}]$ och i $[1, \infty[$, konkav i $[\frac{1}{e}, 1]$ **b)** π

uppg. 5

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{\ln(\cosh(x))}{x}$ för $x \neq 0$.

a) f är C^1 i alla punkter $x \neq 0$ (ty f är sammansatt av C^1 -funktioner);

för $x = 0$ gäller:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(\cosh(x))}{x^2} = \frac{\ln(1 + \cosh(x) - 1)}{\cosh(x) - 1} \cdot \frac{(\cosh(x) - 1)}{x^2} = \\ &= \frac{\ln(1 + \cosh(x) - 1)}{\cosh(x) - 1} \cdot \frac{1}{\cosh(x) + 1} \cdot \left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)^2 \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ då } x \rightarrow 0, \text{ ty } \frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow 1 \text{ då } \\ &h = \cosh(x) - 1 \rightarrow 0 \text{ och } \frac{\sinh(x)}{x} = \frac{\sinh(x) - \sinh(0)}{x - 0} \rightarrow \cosh(0) \text{ (derivatan av sinh i origo)} \\ &\text{då } x \rightarrow 0, \text{ alltså är } f \text{ deriverbar i } 0 \text{ med } f'(0) = \frac{1}{2}. \text{ Vidare gäller för } x \neq 0 \end{aligned}$$

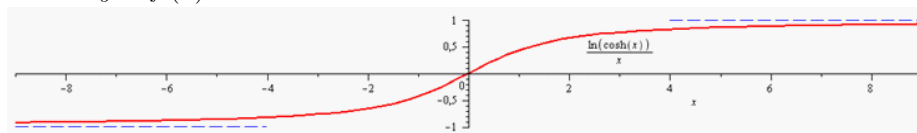
$$f'(x) = \frac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} - \ln(\cosh(x))}{x^2} = \frac{1}{\cosh(x)} \cdot \frac{\sinh(x)}{x} - \frac{\ln(\cosh(x))}{x^2} \xrightarrow{\text{s.o.}} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0), \text{ dvs.}$$

f' är kontinuerlig i 0, alltså f är C^1 även i 0. vsv

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(e^x \left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right) = \\ &= 1 + 0 \cdot \ln\left(\frac{1+0}{2}\right) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ ty } f \text{ är udda, eller s.o.:} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(e^{-x} \left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)}{x} = -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right) = -1 + 0.$$

ANM: f är strängt växande (visa det, är enkelt), $y = \pm 1$ är asymptoter till $y = f(x)$:



b) $1 - \frac{\ln(\cosh(x))}{x} \underset{\text{s.o.}}{=} \frac{x - x \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)}{x} = \frac{\ln(2) - \ln(1+e^{-2x})}{x} > \frac{\ln(2)}{x} > 0$ för $x > 1$,
 $\int_1^\infty \frac{\ln(2)}{x} dx$ är divergent, jämförelsekriteriet ger då att $\int_1^\infty \left(1 - \frac{\ln(\cosh(x))}{x}\right) dx$ är divergent.

svar: **a)** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1$ **b)** divergent

uppg. 6

Låt $M = \left\{ \frac{n - |\cos(n)|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$; vi skall visa att $\sup M = 1$, dvs. att

a) 1 är en majorant till M och **b)** 1 är den minsta majoranten till M :

a) $\frac{n - |\cos(n)|}{n} = 1 - \frac{|\cos(n)|}{n} \leq 1$ ty $|\cos(n)| \geq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

b) Inget $K < 1$ kan vara en majorant till M ty till $\epsilon = 1 - K > 0$ finns $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $\left| \frac{|\cos(n)|}{n} - 0 \right| = \frac{|\cos(n)|}{n} < \epsilon$ för alla $n_0 < n \in \mathbb{N}$ (ty $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\cos(n)| = 0$),

alltså $1 - \frac{|\cos(n_0+1)|}{n_0+1} > 1 - \epsilon = K$. vsv

ANM: Visserligen är $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|\cos(n)|}{n}\right) = 1$, men det ger inte $1 = \sup M$ ty $1 - \frac{|\cos(n)|}{n}$ är inte växande!