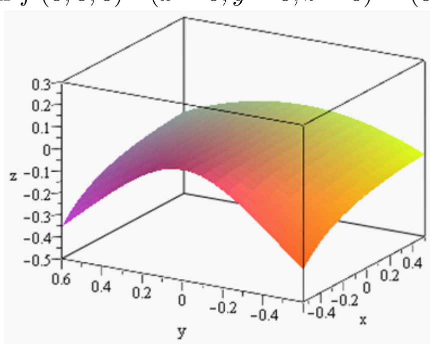
Tentamen i flervariabelanalys för F1/TM1 (mve035, tma975), 11-01-14

uppg. 1

$f(x,y,z) = x\sin z + z\cos x + \cosh y \cos z$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$. $\quad \operatorname{grad} f(x,y,z) =$
$= (\sin z - z\sin x, \sinh y\cos z, x\cos z + \cos x - \cosh y \sin z) \overset{\text{i origo}}{=} (0,0,1)$.

a) $f(0,0,0) = 1$, tangentplanet till nivåytan $f(x,y,z) = 1$ går genom origo och har normalvektorn $\operatorname{grad} f(0,0,0) = (0,0,1)$, är alltså xy-planet! [Tangentplanet har ekvationen $f(0,0,0) \bullet (x-0, y-0, z-0) = (0,0,1) \bullet (x,y,z) = z = 0$].



b) Sätt $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; riktningsderivatan av f i origo i riktningen $(1,1,1)$ är $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0,0) = \operatorname{grad} f(0,0,0) \bullet \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1) \bullet (1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $\frac{d \operatorname{grad} f(x,y,z)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} -z\cos x & 0 & \cos z - \sin x \\ 0 & \cosh y \cos z & -\sinh y \sin z \\ \cos z - \sin x & -\sinh y \sin z & -x\sin z - \cosh y \cos z \end{vmatrix} \overset{\text{i origo}}{=}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, inversa funktionssatsen ger att avbildningen $(x,y,z) \longmapsto \operatorname{grad} f(x,y,z)$ är bijektiv lokalt i origo.

svar: $\boxed{\textbf{b)}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textbf{c)}\ \text{ja}}$.

uppg. 2

Låt $f(x,y) = 1 - |xy|\sqrt{3 + x^2 + y^2}$ och $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

a) f är partiellt deriverbar i origo ty

$$\begin{cases} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{1-1}{x} = 0 \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{1-1}{y} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0 \end{cases}, \text{ det ger } f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0,$$

det relativa felet $\varrho(x,y) = \frac{f(x,y) - \left(f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-|xy|\sqrt{3+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ går mot 0 då x går mot 0 ty $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varrho(x,y) = \lim_{\sqrt{x^2+y^2}=r\to 0} \frac{-r^2|\cos\varphi \sin\varphi|\sqrt{3+r^2}}{r} = 0$,
alltså är f differentierbar i origo.

För $a \neq 0$ är f inte partiellt deriverbar m.a.p. y i $(a,0)$ ty $\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0} =$
$= \frac{1-|ay|\sqrt{3+a^2+y^2}-1}{y} = -|a|\sqrt{3+a^2+y^2}\frac{|y|}{y} \to \begin{cases} |a|\sqrt{3+a^2} \text{ då } y \to 0\text{-} \\ -|a|\sqrt{3+a^2} \text{ då } y \to 0_+ \end{cases},$
alltså är f inte differentierbar i $(a,0)$.

b) I polära koordinater $[x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi]$ gäller för $0 \leq r \leq 1$
$f(x,y) = 1 - r^2|\cos\varphi\sin\varphi|\sqrt{3+r^2} \geq 1 - |\sin 2\varphi| \geq 1 - r^2 \geq 0.$

Eller: Den kontinuerliga funktionen $g(x,y) = xy$ antar på den kompakta enhetsskivan D ett största och ett minsta värde, nämligen $\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{2}$:
enda stationära (inre!) punkten är origo ($g'_x = y = 0, g'_y = x = 0$), på randen är (med polära koordinater) $|g(x,y)| = |\cos\varphi\sin\varphi| = \frac{1}{2}|\sin 2\varphi| \leq \frac{1}{2}$, eller
$g(x,y) = \pm x\sqrt{1-x^2} = h(x)$, för $|x| < 1$ är $h'(x) = \pm\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$
$= \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, max/min finns alltså bland $g(0,0) = h(\pm 1) = 0$
och $\pm h\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2}$. Då gäller för $(x,y) \in D$ att
$f(x,y) = 1 - |xy|\sqrt{3+x^2+y^2} \geq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 0.$ vsv

Eller man argumenterar så här: på grund av symmetri räcker det att visa att $F(x,y) = xy\sqrt{3+x^2+y^2} \leq 1$ på $\Omega = \{(x,y) \in D : x \geq 0, y \geq 0\}$:
F saknar stationära punkter ($F'_x = y\sqrt{3+x^2+y^2} + \frac{x^2y}{\sqrt{3+x^2+y^2}} \neq 0$ i inre punker), max/min antas alltså på randen: $F(x,0) = F(0,y) = 0$, på $x^2+y^2 = 1$ är $F(x,y) = 2x\sqrt{1-x^2}$ med minsta värdet $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ (största värdet $F(0,1) = F(1,0) = 0$) som ovan.

c) Kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ är väldefinierad (se **b)**),
K:s volym är $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$ [p.g.a. symmetri, Ω: se **b)**]

$$= 4\iint\limits_\Omega \left(1 - xy\sqrt{3+x^2+y^2}\right)dxdy = 4\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - xy\sqrt{3+x^2+y^2}\right)dy\right)dx =$$
$$= 4\int_0^1\left[y - \frac{x}{3}\left(3+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{8x}{3} + \frac{x}{3}\left(3+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$
$$= 4\left(\frac{\pi}{4} + \left[-\frac{4x^2}{3} + \frac{1}{15}\left(3+x^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\right) = \pi + 4\left(-\frac{4}{3} + \frac{32}{15} - \frac{9\sqrt{3}}{15}\right)$$

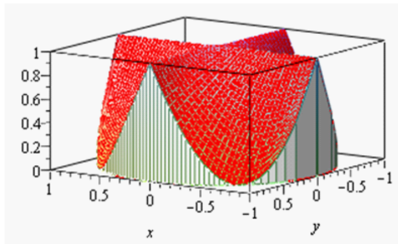
$\left[\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx = \text{arean av } \Omega = \frac{\pi}{4}\right]$ **eller** med polära koordinater:

$$4\iint\limits_\Omega\left(1 - xy\sqrt{3+x^2+y^2}\right)dxdy = 4\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - r^2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{3+r^2}\right)rd\varphi\right)dr =$$
$$= 4\int_0^1\left[r\varphi + \frac{1}{2}r^3\sqrt{3+r^2}\cos^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}dr = 2\int_0^1\left(\pi r - r^3\sqrt{3+r^2}\right)dr = [\text{se nedan}]$$
$$= \left[\pi r^2 - 2\left(\frac{1}{3}r^2\left(3+r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\left(3+r^2\right)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 =$$
$$= \pi - 2\left(\frac{8}{3} - \frac{64}{15}\right) - \frac{2\cdot 9\cdot\sqrt{3}}{15} = \pi + \frac{16}{5} - \frac{12}{5}\sqrt{3}.$$

Vi löste $\int r^3\sqrt{3+r^2}dr =$ [part. int.] $= \frac{r^2}{3}\left(3+r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int r\left(3+r^2\right)^{\frac{3}{2}}dr =$

$= \frac{r^2}{3}\left(3+r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\left(3+r^2\right)^{\frac{5}{2}} + c$, **eller** med substitution:

$$\int_0^1 r^3\sqrt{3+r^2}dr = \left[\begin{array}{c} 3+r^2=t^2 \\ 2rdr=2tdt \end{array}\right] = \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(t^2-3\right)t^2dt = \left[\frac{t^5}{5}-t^3\right]_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{6}{5}\sqrt{3}-\frac{8}{5}.$$



svar: $\boxed{\textbf{a)}\ a=0 \qquad \textbf{c)}\ \frac{5\pi+16-12\sqrt{3}}{5}}$

uppg. 3

$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}$ är C^∞ (på $D_f = \mathbb{R}^2$).

a) Extrempunkter är stationära:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{\left(x^2+y^2+1\right)^2 - 4x^2\left(x^2+y^2+1\right)}{(x^2+y^2+1)^4} = \frac{y^2+1-3x^2}{(x^2+y^2+1)^3} = 0 \\ f'_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee y=0) \end{cases}$$

<u>fall 1</u>: $x=0$: $f'_x(0,y) = \frac{y^2+1}{(y^2+1)^3} \neq 0$.

<u>fall 2</u>: $y=0$: $f'_x(x,0) = \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

De enda stationära punkterna är alltså $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ med $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{16}$. För (t. ex.) $x^2+y^2 \geq 3$ är $|f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{8} = \frac{2}{16} < \frac{3\sqrt{3}}{16}$. På $M = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 3\right\}$ antar f ett största och ett minsta värde (f är C^0, M är kompakt), på randen ∂M är $|f(x,y)| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$, alltså antas max/min i en inre och då stationär punkt, dvs. i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ eller i $(0,0)$ eller i $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$, det visar: $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ är f:s minsta värde och $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ är f:s största värde. Eftersom $\mathbb{R}^2$ är bågvis sammanhängande och f är C^0 på $\mathbb{R}^2$ så antar f även alla värden mellan $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ och $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ (satsen om mellanliggande värden), alltså är $V_f = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right]$.

b) Låt $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$; vi skall beräkna $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$:

på D är $f(x,y) \geq 0$; den enklaste lösningen fås med Fubini:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dx\right)dy = \int_0^\infty\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2(x^2+y^2+1)} + \frac{1}{2(y^2+1)}\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{y^2+1}dy =$$

$= \frac{1}{2}\left[\arctan y\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$ (konvergent!), Fubini ger då att $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = \frac{\pi}{4}$. Utförlig lösning: vi beräknar $I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ där D_n är en uttömmande följd för f och D. Vi ger tre lösningar:

lösn. 1: $D_n = \{(x,y) : 0 \le x \le ny, 0 \le y \le n\}$ (rita!):

$I_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^n \left(\int\limits_0^{ny} \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2} dx \right) dy = \int\limits_0^n \left(\left[\frac{-1}{2(x^2+y^2+1)} \right]_{x=0}^{x=ny} \right) dy =$

$= \frac{1}{2} \int\limits_0^n \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{(n^2+1)y^2+1} \right) dy = \frac{1}{2} \left[\arctan y - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan\left(\sqrt{n^2+1}y\right) \right]_0^n =$

$= \frac{1}{2} \left(\arctan n - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan\left(n\sqrt{n^2+1}\right) \right).$

lösn. 2: $D_n = \{(x,y) : 0 \le x \le n, 0 \le y \le n\}$ (rita!):

$I_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^n \left(\int\limits_0^{n} \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2} dx \right) dy = \int\limits_0^n \left(\left[\frac{-1}{2(x^2+y^2+1)} \right]_{x=0}^{x=n} \right) dy =$

$= \frac{1}{2} \int\limits_0^n \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{n^2+y^2+1} \right) dy = \frac{1}{2} \left[\arctan y - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{n^2+1}}\right) \right]_0^n =$

$= \frac{1}{2} \left(\arctan n - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right) \right).$

lösn. 3: $D_n = \left\{(x,y) \in D : x^2+y^2 \le n^2\right\}$ (rita!):

$I_n = \iint\limits_{D_n} \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy = [\text{pol. koord.}] = \int\limits_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \right) dr =$

$= \int\limits_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2} dr = \begin{bmatrix} r = \tan t \\ dr = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\arctan n} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\arctan n} \sin^2 t dt =$

$= \int\limits_0^{\arctan n} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\arctan n} = \frac{1}{2} \left(\arctan n - \frac{n}{n^2+1} \right)$ ty

$\sin 2t = \frac{2 \sin t \cos^2 t}{\cos t} = \frac{2 \tan t}{\tan^2 t + 1}$, eller $\int\limits_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2} dr = \int\limits_0^n \left(\frac{r}{(r^2+1)^2} \cdot r \right) dr =$

$[\text{part. int.}] = \left[r \frac{-1}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan r \right]_0^n = \frac{1}{2} \left(\arctan n - \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \right).$

Alla tre lösningar ger $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$ ty

$\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan\left(n\sqrt{n^2+1}\right) \right) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0,$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right) = 0 \cdot \arctan 1 = 0$

och $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0.$

svar: $\boxed{\textbf{a) } V_f = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16} \right] \qquad \textbf{b) } \frac{\pi}{4}}$

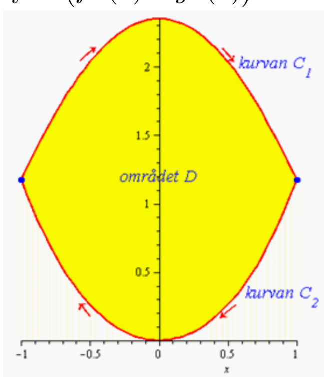
uppg. 4

Sätt $f(x) = 2\sinh(1)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, $g(x) = x\sinh(x)$; f, g är C^1 i $\mathbb{R}^2$, området $D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ g(x) \le y \le f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ är väldefinierat med rand $\partial D = C_1 + C_2$ (medurs) där $C_1 : y = f(x), -1 \xrightarrow{x} 1$ och $C_2 : y = g(x), 1 \xrightarrow{x} -1$ ty f är strängt konkav, g strängt konvex på $[-1,1]$ ($f'' < 0$, $g'' > 0$ på $]-1,1[$), kurvorna $y = f(x)$ resp. $y = g(x)$ ligger alltså över resp. under sekanten mellan $(-1, \sinh(1))$ och $(1, \sinh(1))$ (eller ty f och g är jämna och på $[0,1]$ är f strängt avtagande och g strängt växande med $f(0) = 2\sinh(1) > f(1) =$

$= \sinh(1) = g(1) > g(0) = 0)$. Fältet $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) =$
$= (xy^3, x^2y^2)$ är C^2 i $\mathbb{R}^2$ och $\int\limits_{C_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{C_2} (Pdx + Qdy) =$
$= \int\limits_{C_1+C_2} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\partial D \text{ (medurs!!)}} (Pdx + Qdy) =$ [Green gäller!]

$$= -\iint\limits_D \left(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right) dxdy = \iint\limits_D \left(xy^2\right) dxdy = \int\limits_{-1}^{1} x \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} y^2 dy\right) dx =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} x \left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=g(x)}^{y=f(x)} dx = \tfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} x\left(f^3(x) - g^3(x)\right) dx = 0$$

ty $x\left(f^3(x) - g^3(x)\right)$ är udda ($f^3 - g^3$ är jämn!).



svar: $\boxed{0}$ (men $\mathbb{F}$ är inte konservativt!)

uppg. 5

Låt $\mathbb{F}(x,y,z) = (-x-z, x-y, 2z)$, $D = \{(u,v) : -1 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ och $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \left(u-v, u+v^2, u^2+v\right)$, $(u,v) \in D$. $\mathbb{F}$ är C^2 i $\mathbb{R}^3$.

a) $\operatorname{div}\mathbb{F}(x,y,z) = -1-1+2 = 0 \Rightarrow \mathbb{F}$ har en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ är konvex); $\operatorname{rot}\mathbb{F}(x,y,z) = (0,-1,2) \ne \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{F}$ har ej en potential i $\mathbb{R}^3$.

b) En normalvektor till Y är $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 2u \\ -1 & 2v & 1 \end{vmatrix} =$
$= (1-4uv, -1-2u, 2v+1)$, $\boldsymbol{n}$ är "uppåtriktad" (ty $2v+1>0$),
flödet av $\mathbb{F}$ i riktningen $\boldsymbol{n}$ är alltså (med $\mathbb{N} = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$)

$$\iint\limits_Y \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS = \iint\limits_D \mathbb{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \bullet \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v dudv =$$
$$= \iint\limits_D \left(-u-u^2, -v-v^2, 2\left(u^2+v\right)\right) \bullet (1-4uv, -1-2u, 2v+1)\, dudv =$$
$$= \iint\limits_D \left(\left(u+u^2\right)(4uv-1) + \left(v+v^2\right)(1+2u) + 2\left(u^2+v\right)(2v+1)\right) dudv =$$
$$= \iint\limits_D \left(4u^2v + 4u^3v - u - u^2 + v + v^2 + 2u\left(v+v^2\right) + 2\left(u^2+v\right)(2v+1)\right) dudv =$$

[integrera först m.a.p. u och utnyttja "jämn-udda"]

$$= \int\limits_0^1 \left(2\int\limits_0^1 \left((8v+1)u^2 + 3v + 5v^2\right) du\right) dv = 2\int\limits_0^1 \left(\tfrac{8v+1}{3} + 3v + 5v^2\right) dv =$$
$$= 2\left[\tfrac{17}{6}v^2 + \tfrac{1}{3}v + \tfrac{5}{3}v^3\right]_0^1 = \tfrac{17+12}{3} = \tfrac{29}{3}.$$

svar: $\boxed{\textbf{a):}\ \mathbb{F} \text{ har en vektorpotential, men ej en potential i } \mathbb{R}^3 \quad \textbf{b)}\ \frac{29}{3}}$

ytan Y: