

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2010-08-23, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Aron Lagerberg, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

1. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ där $m, n \in \mathbb{N}$. (4p)

2. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\cosh x}\right)^{\sinh x}$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sinh x)^{\frac{1}{\cosh x}}$. (6p)

3. Beräkna längden av kurvan $C: y = \ln \sqrt{1 + \tan^2(x)}$, $|x| \leq \frac{\pi}{3}$. (6p)

4. Rita kurvan $C: y = x + 2\sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ med angivande av extrempunkter och beräkna arean av området mellan C och linjen $y = x$. (8p)

5. Låt $f(x) = \sin(2 \arctan(e^x))$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Visa att $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$ och rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (7p)

b) Beräkna $\int_0^{\infty} f(x) dx$. (4p)

6. a) Låt $f(0) = 1$ och $f(x) = \frac{\sinh x}{\arctan x}$ för $0 \neq x \in \mathbb{R}$.
Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = A$ ($A \in \mathbb{R}$)? (6p)

b) Är $\int_0^{\infty} \frac{\sinh(\sin(x))}{\sqrt{1+x^3} \arctan(\sin(x))} dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (6p)

7. Motivera varför $\sin x < x < \tan x$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$ och visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (5p)

8. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (8p)