

Tentamen inledande matematisk analys för F1 och TM (tma970), 10-08-23

uppg. 1

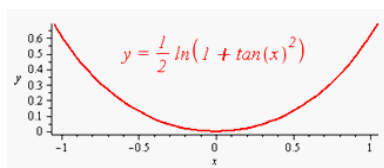
$$\begin{aligned}
 (1+mx)^n - (1+nx)^m &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (mx)^k - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (nx)^k = \\
 &= 1 + nm x + \frac{n(n-1)}{2} (mx)^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (mx)^k - \\
 &\quad - \left(1 + mn x + \frac{m(m-1)}{2} (nx)^2 + \sum_{k=3}^m \binom{m}{k} (nx)^k \right) = \\
 &= \frac{nm(mn-m-mn+n)}{2} x^2 + \sum_{k=3}^n \left(\binom{n}{k} (mx)^k - \binom{m}{k} (nx)^k \right) = \\
 &= \frac{nm(n-m)}{2} x^2 + x^3 \sum_{k=3}^n \left(\binom{n}{k} m^k - \binom{m}{k} n^k \right) x^{k-3}, \text{ alltså är} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{nm(n-m)}{2} + x \sum_{k=3}^n \left(\binom{n}{k} m^k - \binom{m}{k} n^k \right) x^{k-3} \right) = \\
 &= \frac{nm(n-m)}{2} + 0. \quad \textbf{svar: } \boxed{\frac{nm(n-m)}{2}}
 \end{aligned}$$

uppg. 2

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{\cosh x}\right)^{\sinh x} &= e^{\sinh x \ln\left(1 + \frac{1}{\cosh x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^1 \text{ ty exponentialfunktionen är} \\
 &\text{kontinuerlig och } \sinh x \ln\left(1 + \frac{1}{\cosh x}\right) = \frac{\sinh x}{\cosh x} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\cosh x}\right)}{\frac{1}{\cosh x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 \text{ ty} \\
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} &= 1 \text{ och } \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1-0}{1+0}. \\
 \text{P.s.s. fås } (1 + \sinh x)^{\frac{1}{\cosh x}} &= e^{\frac{\sinh x}{\cosh x} \frac{\ln(1+\sinh x)}{\frac{1}{\cosh x}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{1 \cdot 0} = 1 \text{ ty} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+t)}{t} &= \lim_{t+1=u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u} \cdot \frac{u}{u-1} = 0 \cdot \frac{1}{1-0}. \quad \textbf{svar: } \boxed{e \text{ resp. } 1}
 \end{aligned}$$

uppg. 3

$$\begin{aligned}
 \text{För } |x| \leq \frac{\pi}{3} \text{ är } \cos x > 0 \text{ och } f(x) &= \ln\left(\sqrt{1+\tan^2(x)}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right) = \\
 &= -\ln(\cos x). \text{ Längden av kurvan } y = f(x), |x| \leq \frac{\pi}{3} \text{ är} \\
 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+(f'(x))^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+(\tan x)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) dx = [-\ln(1-\sin x) + \ln(1+\sin x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \frac{1+\sin \frac{\pi}{3}}{1-\sin \frac{\pi}{3}} = \\
 &= \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \text{ eller substituera } \tan x = t, \text{ då är } (1+\tan^2 x) dx = dt \text{ och} \\
 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+(\tan x)^2} dx &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2 [\ln(t + \sqrt{1+t^2})]_0^{\sqrt{3}} = 2 \ln(\sqrt{3} + 2).
 \end{aligned}$$



svar: $\boxed{2 \ln(2 + \sqrt{3})}$

uppg. 4

$f(x) = x + 2\sqrt{1-x^2}$, $D_f = [-1, 1]$. För $|x| < 1$ är $f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$:

För $x < 0$ är $f'(x) > 0$ och för $x \geq 0$ är

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-5x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+2x)} \begin{cases} > 0 & \text{då } 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{5}} \\ < 0 & \text{då } \frac{1}{\sqrt{5}} < x < 1 \end{cases}, \text{ det visar att } f$$

har lokala minimipunkter i -1 och 1 och en maximipunkt i $\frac{1}{\sqrt{5}}$, uträkning ger:

$f(-1) = -1$ är f 's minsta värde, $f(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ är f 's största värde, $f(1) = 1$ är ett lokalt minimum.

Eftersom $f(x) = x + 2\sqrt{1-x^2} \geq x$ så är arean mellan dessa kurvor

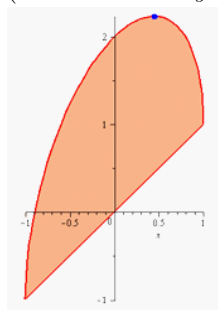
$$\int_{-1}^1 (f(x) - x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{\text{jämn}} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi \quad [= \text{arean av cirkelski-}$$

$$\text{van } x^2 + y^2 \leq 1]; \quad \text{räkning: } 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right] =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt \underset{\cos t \geq 0}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi.$$

Anm: för $|x| < 1$ är $f''(x) = \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -2 \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} < 0$, dvs.

f är strängt konkav (på $[-1, 1]$), alltså ligger $y = f(x)$ ovanför sekanten $y = x$ (båda kurvorna $y = f(x)$ och $y = x$ går genom punkterna $(-1, -1)$ och $(1, 1)$).



svar: $\boxed{-1 \text{ är minimipunkt, } \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ är maximipunkt, } 1 \text{ är lokal minimipunkt, arean är } \pi \quad (f \text{ är strängt konkav})}$

uppg. 5

a) $f(x) = \sin(2 \arctan(e^x))$; sätt $\alpha = \arctan(e^x)$ ($\Leftrightarrow \tan \alpha = e^x$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$),

$$\text{då är } f(x) = \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}.$$

Eller: rita en rätvinklig triangel med kateterna e^x och 1 och hypotenusan

$$\sqrt{1+e^{2x}}, \text{ då får du } \sin \alpha = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \text{ och}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{\cosh x}.$$

f är jämn [Kolla $\frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$!], för $x > 0$ är $f'(x) = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} < 0$, alltså är $f(0) = 1$ f 's största värde. Vidare är

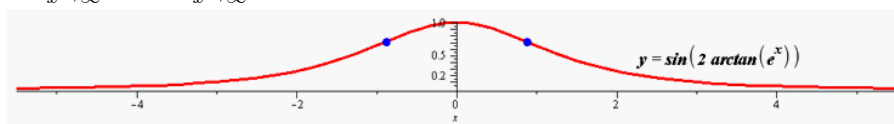
$$f''(x) = -\frac{\cosh^3 x - 2 \sinh^2 x \cosh x}{\cosh^4 x} = \frac{2 \sinh^2 x - \cosh^2 x}{\cosh^3 x} = \frac{\sinh^2 x - 1}{\cosh^3 x} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sinh x > 1 \\ \sinh x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \operatorname{arcsinh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2}) \\ x < \operatorname{arcsinh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

[lös $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$!], det visar att f är

$\begin{cases} \text{strängt konkav på } [0, \ln(1 + \sqrt{2})] \\ \text{strängt konvex på } [\ln(1 + \sqrt{2}), \infty[\end{cases}$, $\ln(1 + \sqrt{2})$ är inflexionspunkt.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = 0$, det visar att x -axeln är asymptot. Grafen:



$$\text{b) } \int_0^\infty f(x) dx = 2 \int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = 2 [\arctan(e^x)]_0^\infty =$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(e^x) - \arctan(e^0) \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

ANM: Integralen kan beräknas direkt:

$$\int_0^\infty \sin(2 \arctan(e^x)) dx = \left[\begin{array}{l} \arctan(e^x) = t, x = \ln(\tan t) \\ dx = \frac{1}{\tan t \cos^2 t} dt = \frac{1}{\sin t \cos t} dt \end{array} \right] = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

svar:

a) 0 är maximipunkt; $y = 0$ är asymptot; f är konkav på $[-a, a]$, konvex på $]-\infty, -a]$ och på $[a, \infty[$ där $a = \ln(1 + \sqrt{2})$ **b)** $\frac{\pi}{2}$

uppg. 6

a) $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{\sinh x}{\arctan x}$: f är jämn ty $\sinh$ och $\arctan$ är udda, f är kontinuerlig ty $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \frac{x}{\arctan x} = 1 \cdot 1 = f(0)$ ty

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sinh 0}{x - 0} = \cosh(0) = \text{derivatan av } \sinh x \text{ i } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1+0^2} = \text{derivatan av } \arctan x \text{ i } x = 0$$

[eller $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{\arctan x = t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos t} \frac{t}{\sin t} = 1 \cdot 1$]. För $x > 0$ är

$$f'(x) = \frac{\cosh x \arctan x - \frac{\sinh x}{1+x^2}}{\arctan^2 x} > 0 \text{ ty } h(x) = \cosh x \arctan x - \frac{\sinh x}{1+x^2} > 0 \text{ ty}$$

$$h'(x) = \sinh x \arctan x + \cosh x \frac{1}{1+x^2} - \cosh x \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x \sinh x}{(1+x^2)^2} > 0,$$

alltså $h(x) > h(0) = 0$; det ger att f är strängt växande på $[0, \infty[$ (och därmed strängt avtagande på $]-\infty, 0]$) och att $f(x) > f(0) = 1$.

Ekvationen $f(x) = A$ har alltså på $[0, \infty[$ $\begin{cases} \text{ingen lösning då } A < 1 \\ \text{högst en lösning då } A \geq 1 \end{cases}$;

eftersom f är kontinuerlig och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ ($f(x) > \frac{2 \sinh x}{\pi}$) så ger satsen om mellanliggande värden att $f(x) = A$ har minst en lösning på $[0, \infty[$ då $A \geq 1$.

svar: $f(x) = A$ har $\begin{cases} \text{ingen lösning då } A < 1 \\ \text{en lösning då } A = 1 \text{ (} f\text{'s minsta värde } f(0) = 1) \\ \text{2 lösningar då } A > 1 \text{ (en i }]-\infty, 0[, \text{ en i }]0, \infty[) \end{cases}$

- b) Sätt $g(k\pi) = 1$ och $g(x) = f(\sin x) = \frac{\sinh(\sin x)}{\arctan(\sin x)}$ för $x \neq k\pi$. g är jämn, 2π -periodisk och, enligt a), kontinuerlig, är alltså på varje $[k\pi, (k+2)\pi]$ begränsad d.v.s. $0 \leq g(x) \leq A$ för något A (man kan ange minsta/största värdet m/M : g är (igen enligt a)) strängt växande på $[0, \frac{\pi}{2}]$ (ty $\sin$ är str. växande där) och strängt avtagande på $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (ty $\sin$ är str. avtagande där), alltså gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ $g(0) = 1 \leq g(x) \leq g(\frac{\pi}{2}) = \frac{4 \sinh 1}{\pi}$.

För $x \geq 1$ gäller alltså $0 \leq \frac{\sinh(\sin x)}{\sqrt{1+x^3} \arctan(\sin x)} \leq \frac{A}{x^{\frac{3}{2}}}$; $\int_1^{\infty} \frac{A}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ är konvergent,

jämförelsekriteriet ger då att även $\int_1^{\infty} \frac{\sinh(\sin x)}{\sqrt{1+x^3} \arctan(\sin x)} dx$ är konvergent och

därmed har vi visat att $\int_0^{\infty} \frac{\sinh(\sin x)}{\sqrt{1+x^3} \arctan(\sin x)} dx =$

$= \int_0^1 \frac{\sinh(\sin x)}{\sqrt{1+x^3} \arctan(\sin x)} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sinh(\sin x)}{\sqrt{1+x^3} \arctan(\sin x)} dx$ är konvergent.

svar: a) s.o. b) konvergent

