

övningar på induktion

ind 1. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ($x \neq 1$).

ind 2. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} k^2$.

ind 3. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

ind 4. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ind 5. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$.

ind 6. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

ind 7. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

ind 8. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

ind 9. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att

- a) $4^{2n} + 4$ är delbart med 20.
- b) $8^n - 7n - 1$ är delbart med 49.

ind 10. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

- a) $3^n \geq n^3$.
- b) $(n!)^2 < 2^{n^2}$.

ind 11. Visa med induktion att en mängd med n element har 2^n delmängder, $n \in \mathbb{N}$.

ind 12. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x$, $0 < x < \pi$.

ind 13. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

ind 14. Visa att för alla naturliga tal $n \geq 4$ gäller

$$D^n \ln\left(\frac{1}{|x^2-1|}\right) = (-1)^n (n-1)! \left(\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

ind 15. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\int_0^1 (-\ln x)^n dx = n!$.

övningar på arcusfunktioner

- arc 1.** Beräkna
- $\cos(2 \arctan \frac{1}{2})$.
 - $\sin(\arctan 2 - \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}})$.
 - $\tan(\frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25})$.
- arc 2.** Beräkna
- $\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{4}$.
 - $2 \arctan 2 + \arcsin \frac{4}{5}$.
 - $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.
- arc 3.** Visa att $\operatorname{arccot} F_{2n} = \operatorname{arccot} F_{2n+1} + \operatorname{arccot} F_{2n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Fibonacci}$).
- arc 4.** Lös ekvationen
- $\arctan x = \arccos(2x)$.
 - $\frac{1}{(\sin(\arctan x))^2} - \frac{1}{(\tan(\arcsin x))^2} = 4x^2$.
- arc 5.** Rita funktionen
- $y = \arctan \frac{e^x - 1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{e^x - 4}{\sqrt{3} e^x}$.
 - $y = 2 \arctan x + \arctan \frac{2x}{x^2 - 1}$.
- arc 6.** Beräkna f^{-1} då
- $f(x) = \tanh x$.
 - $f(x) = \cosh x$ för $x \in D_f = [0, \infty[$.

- svar:**
- arc 1:** a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{4}$
- arc 2:** a) $\frac{\pi}{4}$ b) π c) $\frac{\pi}{4}$ (med denna formel beräknade *J. Machin* (~1705) talet π med 100 decimaler!)

arc 4: a) $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}$ b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

arc 5: funktionerna är styckvis konstanta: a) $y = \frac{\pi}{3}$ b) $y = \begin{cases} -\pi, & x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ \pi, & x > 1 \end{cases}$

arc 6: a) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$ b) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$

standardgränsvärden

$\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \pm$	$\frac{1}{x} \rightarrow 0 \pm \Leftrightarrow x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$p, q \in \mathbb{R}, p > 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{e^{px}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^q}{x^p} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln x)^q = 0$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$