TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 21/10-2011

1. (a) konvergent ; (b) konvergent ;
(c) konvergent ; (d) divergent ;
(e) sant ; (f) falskt ;
(g) falskt ; (h) falskt.

---

2. (a)

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow e^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^0 = 1$$

(b)

$$\frac{\cos x - 1}{\ln(1+\sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x}{\ln(1+\sin^2 x)} \cdot \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}}}_{\sin^2 x \to 0,\ x\to 0 \ \Rightarrow\ \downarrow x\to 0\ \ 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x}}_{=-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x + 1}}_{\downarrow x\to 0\ \ 1/2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

---

3. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad D_f:\ x \neq 0$

Nollställen: $-x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \quad \Big| \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$$-1 = x$$

$\Rightarrow \exists!$ reellt nollställe, $x = -1$

Tecken: $f(x) = \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}}_{=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}>0 \text{ i } D_f}(1+x)$

$\Rightarrow$ $f<0$ för $x<-1$

$f>0$ för $-1<x<0$ & $x>0$

$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \text{"}\frac{1}{0_+}\text{"} + 0 = +\infty$

$\Rightarrow$ $x=0$ vertikal asymptot

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{"}0+\infty\text{"} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; men $f(x) - 0\cdot x$ saknar ändligt gränsvärde

$\Rightarrow$ $\nexists$ asymptoter i $\pm\infty$

ej jämn, ej udda, ej periodisk

$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} =$

$= \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x-2) = 0$ för $x=2$ (endast)

x		0		2	
f'	$+$	|	$-$	0 ∪	$+$

$\Rightarrow$ f har lok. min i $x=2$

$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} =$

$= \frac{2}{9}x^{-\frac{8}{3}}(5-x)$

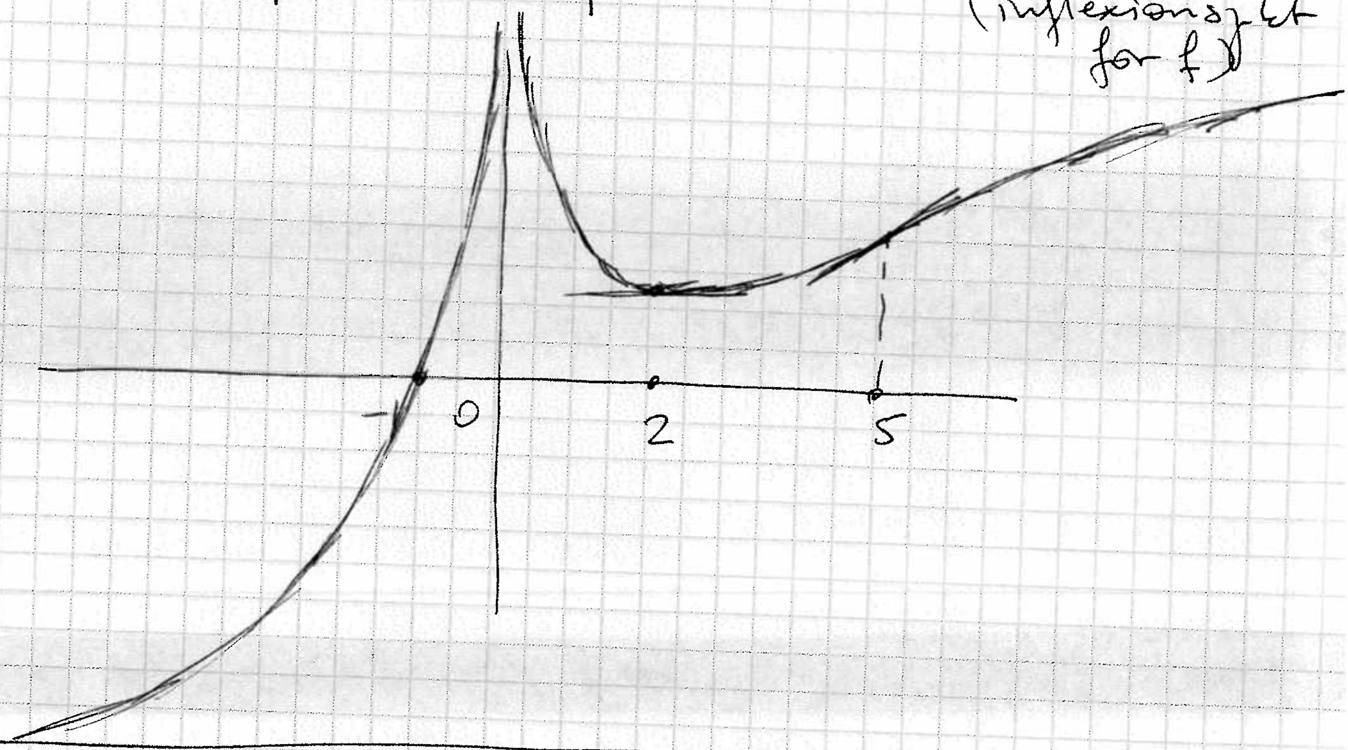
x		0		5	
f''	$+$ ∪	|	$+$ ∪	0	$-$ ∩

$\Rightarrow$ inflexion i $x=5$

Tabell:

		−1		0		2		5		③
f	$-\infty$ ↗	konvex	↗ 0 ↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	lok. min konvex		infl. ↗	konkav $+\infty$	
f'	+				−	0		+		
f''	+					+		0	−	

(inflexionspkt för f)



④ (a) $$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+2x+3)} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+2x+3) + B(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x+1)^2$$

$x=-1$: $\quad 1 = 0 + 2B + 0 \Rightarrow B = 1/2$

x^3 : $\quad 0 = A + C$

x^2 : $\quad 0 = 3A + B + 2C + D$

x^0 $(x=0)$: $\quad 1 = 3A + 3B + D$

$\Rightarrow 1 = 2B - 2C$

$\Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow D = -1/2$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \quad (+C)$$

4

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad (+C)$$

$\Rightarrow$ en primitiv funktion till $f(x)$

är $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}}$

(b) $$\int_0^{1/4} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \sqrt{0}=0 \\ \sqrt{1/4}=1/2 \end{matrix}\right]$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_0^{1/2} \arcsin t\, d(\arcsin t)$$

$$= \left[(\arcsin t)^2\right]_0^{1/2} = \frac{\pi^2}{36}$$

---

5. Längden av ellipsen: $(b>0)$

parametrisering: $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$$l_{ell} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+(b^2-1)\cos^2\theta}\,d\theta$$

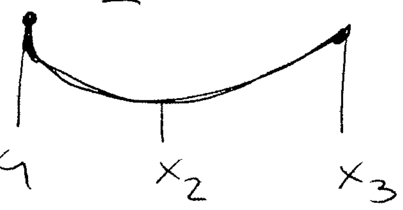
Längden av grafbiten: $l_s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+c^2\cos^2 x}\,dx$

$\Rightarrow$ likhet råder för $c^2 = b^2-1$, vilket låter sig göras för $b \geq 1$ (annars $l_s' > 2\pi > l_{ell}$)

e.2 Antag motsatsen,
d.v.s. att $\exists\, a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ s.a

$$\underbrace{\begin{matrix} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_3) > f(x_2) \end{matrix}}_{\mathrm{I}} \quad \text{alt.} \quad \underbrace{\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_3) < f(x_2) \end{matrix}}_{\mathrm{II}}$$

I :



Utan inskränkning $f(x_3) \le f(x_1)$

f kontinuerlig
$\Rightarrow f$ antar alla värden mellan $f(x_2)$ och $f(x_1)$ i (x_1, x_2)
$\Rightarrow$ om $f(x_3) < f(x_1)$ så antas värdet $f(x_3)$ i (x_1, x_2)
annars, om $f(x_3) = f(x_1)$ antas $f(x_3)$ i x_1

I båda fallen antas $f(x_3)$ i $[x_1, x_2)$, men $x_3 \notin [x_1, x_2)$
$\Rightarrow \exists$ reellt tal som antas som värde minst två gånger. Motsägelse!

Fall II behandlas analogt

$\Rightarrow f$ monoton

Motexempel för f ej kontinuerlig: