

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2011-10-21, kl. 14:00 - 18:00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Oskar Hamlet, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15:00 och 17:00.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5+1}} dx$; (b) $\int_0^\infty \sin \frac{1}{x^2+1} dx$; (c) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$; (d) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$.

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(e) Om f är deriverbar i (a, b) , så är f kontinuerlig i (a, b) .

(f) Om f är kontinuerlig i (a, b) , så är f deriverbar i (a, b) .

(g) Om f är deriverbar i (a, b) , så är f' kontinuerlig i (a, b) .

(h) Om f är deriverbar i \mathbb{R} och $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, så är f begränsad när $x \rightarrow \infty$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ (4p); (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + \sin^2 x)}$ (4p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 3)}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$. (4p)

5. Kan man bestämma konstanten c så att längden av ellipsen $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$, är lika med längden av grafen till funktionen $f(x) = c \sin x$, över en period? (6p)

6. Funktionen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (a, b) , och f antar inte något reellt tal som värde mer än en gång. Visa att f måste vara monoton i (a, b) . (7p)

Ge ett exempel som visar att påståendet inte behöver vara sant om f inte är kontinuerlig. (2p)

7. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (8p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM