

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2012-01-12, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Emil Gustavsson, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^9+1}} dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sin \sqrt{x}}; \quad (c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}; \quad (d) \int_1^2 \frac{x}{\cos x} dx.$$

Funktionen f i (e)–(h) är kontinuerlig och begränsad i intervallet $[0, \infty)$, samt uppfyller $f(x) \neq 0$ för alla $x \in [0, \infty)$. Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(e) Funktionen f har ett största värde i $[0, \infty)$.

(f) Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existerar (och är ändligt).

(g) Funktionen $\frac{1}{f}$ är begränsad i $[0, \infty)$.

(h) Funktionen f byter inte tecken i $[0, \infty)$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{x^4}} \quad (4p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{e^{2x^2} - \cos x} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. (4p)

(b) Bestäm alla reella α sådana att integralen $\int_1^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^\alpha} dx$ konvergerar. (4p)

5. Visa att $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, för alla $x > 0$. (8p)

6. Låt a, b vara reella tal, sådana att $a < b$. Visa att ekvationen

$$\frac{1}{(x-a)^4} + \frac{2}{(x-b)^9} = 0,$$

har minst en lösning i intervallet (a, b) . (6p)

7.(a) Formulera satsen om invers funktions derivata. (2p)

(b) Härled derivatan av funktionen \arctan . (2p)

(c) Bevisa satsen om invers funktions derivata. (4p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM