

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2013-01-16, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Adam Andersson, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$; (b) $\int_1^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; (c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$; (d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$.

Avgör om gränsvärdena nedan existerar. Ge endast svar: finns ändligt/finns oändligt/finns varken ändligt eller oändligt.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x + \ln(1 - \sin^2 x)}{x\sqrt{1 - \cos x}}$;

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$;

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2 \ln(1+x^2)}}{x^4 + 1}$;

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+2}$ (4p); (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1 - \sin x^2)}$ (4p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x \cos 2x dx$. (4p)

5. Härled formeln för volymen av en rak cirkulär kon med basradie r och höjd h . (5p)

6. Funktionen $f(x)$ är den primitiva funktion till $1 - e^{-x^2}$ som uppfyller $f(0) = 0$. Visa att f är en udda funktion. (3p) Visa att $|f(x)| < |x|$ för alla reella $x \neq 0$. (3p) Rita f 's graf. (2p)

7.(a) Visa att gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existerar. (7p)

(b) Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$. (2p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM