

TMA970

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM

Datum: 2012-10-24, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Christoffer Standar, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x+1}} dx$; (b) $\int_1^\infty \sin \frac{1}{x^2} dx$; (c) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$; (d) $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) $\int_I f, \int_I g$ konvergenta $\Rightarrow \int_I (f+g)$ konvergent;

(f) $\int_I f, \int_I g$ divergenta $\Rightarrow \int_I (f+g)$ divergent;

(g) $\int_I f$ konvergent, $\int_I g$ divergent $\Rightarrow \int_I (f+g)$ konvergent;

(h) $\int_I f$ konvergent, $\int_I g$ divergent $\Rightarrow \int_I (f+g)$ divergent.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x+x})$ (4p); (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x \sin 2x}$ (4p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln \frac{1}{\cos x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2(\ln x)^2$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. (4p)

5. Bestäm definitionsmängd, gränsvärden och asymptoter för $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. (6p)

6.(a) Funktionen f är definierad **och kontinuerlig**¹ i intervallet (a, b) , och reellvärd. Givet att f är deriverbar i $(a, c) \cup (c, b)$, där $c \in (a, b)$, samt att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ finns, visa att f är deriverbar i punkten c , och $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$. (6p)

(b) Ge exempel som visar att f kan vara deriverbar i punkten c utan att $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ existerar. (2p)

¹"kontinuerlig" fattades i tentan; missen upptäcktes av doktoranden som gick ronderna

- 7.(a)** Ge definitionen för att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. (2p)
- (b)** Visa med hjälp av definitionen att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$. (2p)
- (c)** Visa att om f är begränsad i en omgivning till x_0 , och om $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, så gäller $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$. (4p)
- 8.** Formulera och bevisa analysens huvudsats (även kallad integralkalkylens huvudsats, Newton-Leibniz sats). (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM