TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 16/1 - 14

1. (a) divergent; (b) konvergent; (c) konvergent; (d) divergent; (e) sant; (f) falskt; (g) sant; (h) sant.

---

2. (a) $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x+2} \xrightarrow[x\to\infty]{} "0^{\infty}" = 0$

(b) $\frac{\sin^2(1-\cos x)}{x^2\sin x^2} = \frac{\sin^2(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\frac{(1-\cos x)^2}{x^2\sin x^2} =$

$= \frac{\sin^2(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\frac{4\sin^4\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^4}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{x^2\sin x^2} =$

$= \cancel{4}\left(\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\cdot\frac{1}{\cancel{16}_{\,4}}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}$

$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{4}$, ty $1-\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

---

3. $D_f = \mathbb{R}$; $f(-x) = -f(x)$
$\Rightarrow f$ udda

ej periodisk

$f(0) = 0$

$f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, ty $\begin{cases} \arctan x \xrightarrow[\pm\infty]{} \pm\frac{\pi}{2} \\ x^3 \text{ dominerar} \end{cases}$

f kontinuerlig i $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\nexists$ vertikal asymptot

? $\exists$ sned ? $\quad \dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ $\nexists$ sned asymptot

($f \longrightarrow \pm\infty$ som x^3)

$$f'(x) = 3x^2 - 6 + \frac{6}{1+x^2} = \frac{3x^2(x^2-1)}{1+x^2} = 0$$

för $x=0$ och $x = \pm 1$

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ f har lok. max i -1

inflexionspkt i 0 (terass)

lok. min i $+1$

$$f''(x) = 6x + 6\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x =$$

$$= \frac{6x}{(1+x^2)^2}\left((1+x^2)^2 - 2\right) =$$

$$= \frac{6x}{(1+x^2)^2}\left(x^4 + 2x^2 - 1\right) = 0$$

för $\underset{\geq 0}{x^2} = -1 \cancel{\pm} \sqrt{1+1} = \sqrt{2} - 1$

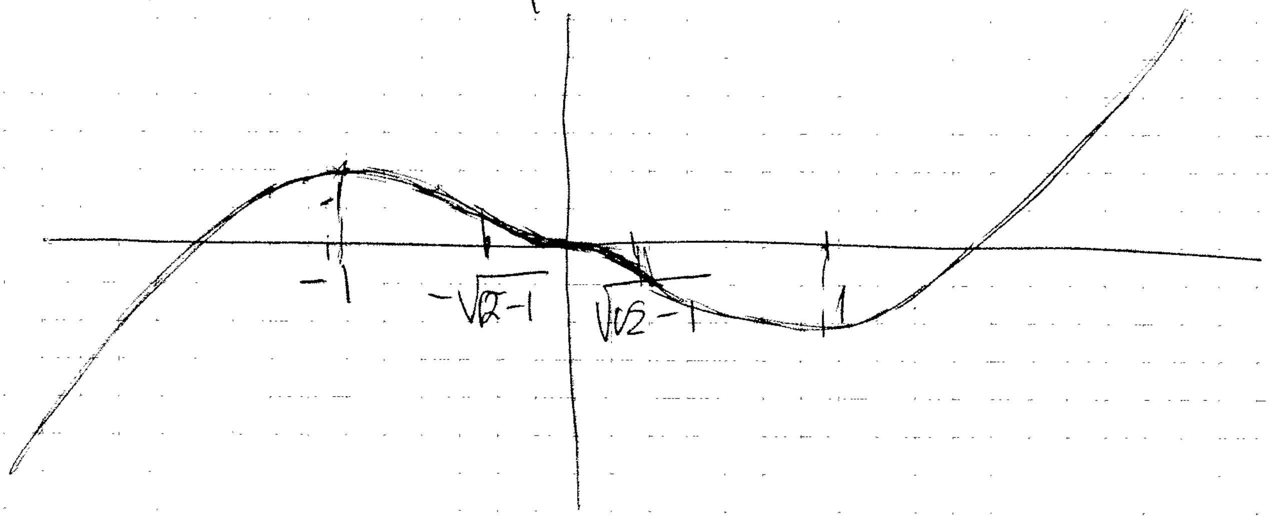
och $x = 0$

x		$-\sqrt{\sqrt{2}-1}$		0		$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konkav		konvex		konkav		konvex

x	$-\infty$		-1		$-\sqrt{\sqrt{2}-1}$		0		$\sqrt{\sqrt{2}-1}$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$5-\frac{3\pi}{2}>0$	$\searrow$	infl.	$\searrow$	0 infl.	$\searrow$	infl.	$\searrow$	$-5+\frac{3\pi}{2}<0$	$\nearrow$	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

f har exakt två nollställen till: ett i $(-\infty, -1)$ och ett i $(1, +\infty)$

(f udda $\Rightarrow$ det hade räckt att utföra analysen för $x \geq 0$)



---

4. (a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x<1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ om f har en primitiv F, så

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}+x+C_1 & x<1 \\ \frac{x^2}{2}-x+C_2 & x \geq 1 \end{cases}$$

f kontinuerlig $\Rightarrow \exists$ primitiv F till f (4)

Kan man välja konstanterna C_1, C_2 s.a. F blir deriverbar i 1 (med derivata $f(1)=0$)?

F måste vara kontinuerlig:

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = -\frac{1}{2}+1+C_1 = C_1+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1+} F(x) = \frac{1}{2}-1+C_2 = C_2-\frac{1}{2}$$

kontinuitet: $C_1+\frac{1}{2} = C_2-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 - 1$$

utan inskränkning kan vi välja $C_2=0$ (vi vill ha en primitiv)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}+x-1 & x \le 1 \\ \frac{x^2}{2}-x & x \ge 1 \end{cases}$$

Kontroll att F är deriverbar i 1:

$$\lim_{x-1=h\to 0-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{x^2}{2}+x-1+\frac{1}{2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{\cancel{(x-1)}-\frac{1}{2}\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{2}(x+1)-1\right) = 0$$

$\Rightarrow \exists F'(1) = 0 = f(1)$

$\Rightarrow$ F primitiv till f i $\mathbb{R}$

(b) $$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} x^2 \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left(-\left[x^2 \sin 2x\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} 2x \cdot \sin 2x \, dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{384} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot 1 + \frac{1}{4}\left(-\underbrace{\left[x \cos 2x\right]_0^{\pi/4}}_{=0} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx\right) = \frac{\pi^3}{384} - \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{8}\underbrace{\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{=1}.$$

---

5. $$\frac{\sqrt{x^3-1} + x}{x^\alpha} \underset{x>0, \text{ ty } x\to+\infty}{=} \frac{x^{3/2}\left(\sqrt{1-1/x^3} + 1/\sqrt{x}\right)}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{x^{3/2}}{x^\alpha}\underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 1} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \alpha < \frac{3}{2} \\ 1 & \alpha = \frac{3}{2} \\ 0 & \alpha > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = 3/2$

---

6. $f'' \geq 0$ i $[2, \infty)$

$\Rightarrow f'$ växande i $[2, \infty)$; $f'(2) > 0$

$\Rightarrow f' > 0$ i $[2, \infty)$

och $f'(x) \geq f'(2) = A \quad \forall x \in [2, \infty)$

6

Enligt medelvärdessatsen

$f(x) = f(2) + f'(\xi_x)(x-2)$,

där ξ_x mellan 2 och x

$x > 2$: $2 < \xi_x < x$

$\Rightarrow f'(\xi_x) \geq A$

$\Rightarrow f(x) \geq f(2) + A(x-2) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow f(x) > 0$ för $x >$ ngt B

$f(2) < 0$

$\Rightarrow \exists$ nollställe till f i $(2, \infty)$

$f' > 0$ i $(2, \infty)$

$\Rightarrow$ det kan inte finnas fler än ett nollställe