

**TMA970****Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2014-01-16, kl. 14:00 - 18:00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Anna Karlsson, tel. **073-5725077**, besöker salen ca 15:00 och 17:00.

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3-1}} dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}; \quad (c) \int_0^e |\ln x| dx; \quad (d) \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{x}} dx.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) Om funktionen  $f$  är deriverbar i  $(a, b)$ , så är  $f$  kontinuerlig i  $(a, b)$ .

(f) Om funktionen  $f$  är deriverbar i  $(a, b)$ , så är  $f$  begränsad i  $(a, b)$ .

(g) Om funktionen  $f$  är deriverbar i  $[a, b]$ , så är  $f$  kontinuerlig i  $[a, b]$ .

(h) Om funktionen  $f$  är deriverbar i  $[a, b]$ , så är  $f$  begränsad i  $[a, b]$ .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger  $-1p$ , inget svar ger  $0p$ ; hela uppgiften ger minst  $0p$ .)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{x+2} \quad (4p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(1 - \cos x)}{x^2 \sin x^2} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen  $f(x) = x^3 - 6x + 6 \arctan x$ . Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till  $f(x) = |x - 1|$ . Motivera! (4p)

(b) Beräkna  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin^2 x dx$ . (4p)

5. Bestäm parametern  $\alpha$  så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1} + x}{x^\alpha},$$

är ett ändligt tal, skilt från 0. (5p)

6. Funktionen  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  är två gånger deriverbar i sin definitionsmängd och uppfyller följande: (i)  $f(2) = -1$ ; (ii)  $f'(2) > 0$ ; (iii)  $f''(x) \geq 0$  i  $[2, \infty)$ . Visa att

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ; (4p)

(b)  $f$  har högst ett nollställe i intervallet  $(2, \infty)$ ; (2p)

(c)  $f$  har minst ett nollställe i intervallet  $(2, \infty)$ . (2p)

7.(a) Visa att gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  existerar. (7p)

(b) Visa att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$ . (2p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM