Dugga 1, 13 september 2014 - SVAR

A.

1d
2a
3b
4c
5c
6b
7c
8b
9c
10a
11c
12a
13d
14d
15a

B.

16: $-\frac{16}{21}$
17: $\frac{2}{3}$
18: 80
19: -4
20: 2

C. *Lösning 1:* För att $\ln x$ ska vara definierad krävs att $x > 0$. För positiva x gäller $\ln(x^2) = 2\ln x$. Genom att använda en av formlerna för cosinus av dubbla vinkeln får vi

$$\sin(\ln x) = 1 - 2\sin^2(\ln x).$$

Sätt $t = \sin(\ln x)$. Vi behöver lösa andragradsekvationen för t

$$2t^2 + t - 1 = 0.$$

Dess lösningar är $t_1 = \dfrac{1}{2}$ och $t_2 = -1$.

(1) $\sin(\ln x) = \dfrac{1}{2}$: Lösningarna är

$$\ln x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{\pi}{6}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

och

$$\ln x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) $\sin(\ln x) = -1$: Lösningarna är

$$\ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Man kan förenkla något och skriva alla lösningar som

$$\ln x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

och

$$\ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösning 2: För att $\ln x$ ska vara definierad krävs att $x > 0$. För positiva x gäller $\ln(x^2) = 2\ln x$. Ekvationen kan skrivas om som

$$\sin(\ln x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\ln x\right).$$

Lösningarna är då alla x sådana att

$$\ln x = \frac{\pi}{2} - 2\ln x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

eller

$$\ln x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln x\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vilket ger samma lösningsskara.