Dugga 1, 10 september 2016 - SVAR

A.

1b
2c
3c
4d
5c
6b
7c
8a
9a
10d
11a
12d
13b
14d
15c

B.

16: $-\frac{7}{20}$
17: 2
18: till exempel $f(x) = 2\sin x + 1$
19: 57
20: 1

C. *Lösning:* För att $\tan x$ och $\tan 2x$ ska vara definierade krävs att $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k$ godtyckligt heltal. Vi härleder först formeln för tangens av dubbla vinkeln

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$
$$[\text{dividera täljare och nämnare med } \cos^2 x \neq 0] = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Sätt nu $\tan x = t,\ t \neq \pm 1$. Olikheten som ska bevisas kan nu skrivas som

$$3t - \frac{4t}{1-t^2} \geq 0.$$

Efter enkla omskrivningar får vi den ekvivalenta olikheten

$$\frac{t(3t^2+1)}{t^2-1} = \frac{t(3t^2+1)}{(t+1)(t-1)} \geq 0.$$

Faktorn $3t^2+1$ är alltid positiv. Därmed behöver vi bara titta på vad resten av faktorerna har för tecken. Vi undersöker tecknen i intervallen $(-\infty, -1),\ (-1, 0],\ [0, 1),\ (1, \infty)$. I det första av dessa intervall har vi: $t < 0,\ t - 1 < 0,\ t + 1 < 0$, alltså är uttrycket negativt och detta intervall hör inte till lösningsmängden. I nästa intervall är tecknen (i samma ordning) $-, -, +$, uttrycket är positivt (0 i 0), alltså hör detta intervall till lösningsmängden. En undersökning av tecknen i återstående två intervall (gör den!) ger att lösningsmängden (för t) ges av $(-1, 0] \cup (1, \infty)$. Nu är det dags att påminna om att $\tan x = t$. Låt oss först titta $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funktionsvärdet för tangens kommer att ligga i de intervall som utgör lösningsmängden för t exakt när $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0] \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Eftersom funktionen tangens är π-periodisk får vi slutligen att den givna olikheten uppfylls om och endast om

$$x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi] \cup (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$