Två induktionsbevis för Fibonaccital

[Sådana bevis kan verka knepiga i början, men ju fler du försöker desto bättre lär du känna dessa enormt intressanta tal!]

Vi utnyttjar $F_0 = 0, F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

Bevis av fib 11

Visa med induktion att $\sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$:

I. $n = 1$: $VL = \sum_{k=1}^{1} F_k = F_1 = 1,\ HL = F_3 - F_4 + 2 = 2 - 3 + 2 = 1$, alltså $VL = HL$.

II. Föruts.: $\sum_{k=1}^{p} pF_p = pF_{p+2} - F_{p+3} + 2$ för $1 \le p \le m$ för något $m \in \mathbb{N}$.

Påst.: $\sum_{k=1}^{m+1} kF_k = (m+1)F_{m+3} - F_{m+4} + 2$.

Bev.: $VL = \sum_{k=1}^{m+1} kF_k = \sum_{k=1}^{m} kF_k + (m+1)F_{m+1} =$ [enl. föruts.]

$= mF_{m+2} - F_{m+3} + 2 + (m+1)F_{m+1}$, titta nu på högerledet:

$HL = (m+1)(F_{m+2} + F_{m+1}) - (F_{m+3} + F_{m+2}) + 2 =$

$= mF_{m+2} + (m+1)F_{m+1} - F_{m+3} + 2 = VL$. vsv

III. Induktionsaxiomet ger att formeln gäller för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

Bevis av fib 17

Visa med induktion att $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$:

I. $n = 1$: $F_0F_2 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$ är ok.

II. Föruts.: $F_{p-1}F_{p+1} - F_p^2 = (-1)^p$ för $1 \le p \le m$ för något $m \in \mathbb{N}$.

Påst.: $F_mF_{m+2} - F_{m+1}^2 = (-1)^{m+1}$.

Bev.: $F_mF_{m+2} - F_{m+1}^2 = F_m(F_{m+1} + F_m) - F_{m+1}(F_m + F_{m-1}) = F_m^2 - F_{m+1}F_{m-1} =$

[enl. föruts.] $= -(-1)^m = (-1)^{m+1}$. vsv

III. Induktionsaxiomet ger att formeln gäller för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

Bevis av gs2

Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\varphi^{2n} + \varphi^{-2n} \in \mathbb{N}$ $\left(\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\Phi}\right)$.

Bevis:

Observera att $\varphi^{4n} - \varphi^{-4n} = \left(\varphi^{2n} - \varphi^{-2n}\right)\left(\varphi^{2n} + \varphi^{-2n}\right)$, Fib2, gs1 och Fib15 ger

$F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{2n} - (1-\Phi)^{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n} - (-\varphi)^{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{-2n} - \varphi^{2n}\right)$, alltså är

$$\varphi^{2n} + \varphi^{-2n} = \frac{-F_{4n}}{-F_{2n}} = \frac{F_{2n}\,(F_{2n-1} + F_{2n+1})}{F_{2n}} \in \mathbb{N}. \quad \text{vsv}$$

ANM: därmed fås t. ex.:

för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\varphi^{2n} + \varphi^{-2n} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \in \mathbb{N}$.