



TMA970, Inledande
matematisk analys FI/TM1
Lösningar 30/10-14

- ① (a) konvergent; (b) konvergent;
 (c) konvergent; (d) falskt;
 (e) falskt; (f) sant.

② (a) $\left(\frac{x}{x+7}\right)^{2x-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} "1^\infty" (?)$
 $= e^{(2x-1) \ln \frac{x}{x+7}}$

$(2x-1) \ln \frac{x+7-7}{x+7} = (2x-1) \ln \left(1 - \frac{7}{x+7}\right) =$

$= -\frac{7(2x-1)}{x+7} \cdot \ln \left(1 - \frac{7}{x+7}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{matrix} \xrightarrow{-7 \cdot 2 = -14} \\ \xrightarrow{1} \end{matrix}$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+7}\right)^{2x-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-7 \cdot 2} = \underline{\underline{e^{-14}}}$

(b) $\frac{\arctan x + x}{\ln(1-x)} = \frac{\arctan x + 1}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$

$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$

$\frac{\arctan x}{x} = \left[\begin{matrix} t = \arctan x \\ x = \tan t \end{matrix} \right] = \frac{t}{\tan t} = \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

$$t = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Rightarrow \frac{\arctan x + x}{\ln(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1+1}{-1} = \underline{\underline{-2}}$$

③ $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x+5}$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -5\} = [-5, \infty)$$

$$f(x) = |x+1| + \sqrt{x+5} = \begin{cases} -x-1 + \sqrt{x+5} & x < -1 \\ x+1 + \sqrt{x+5} & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

∄ vertikala asymptoter

Sned asymptot?

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x+5}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

$$f(x) - x = 1 + \sqrt{x+5} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

∄ sned asymptot ($i \infty$)

D_f ej symmetrisk m.a.f. 0

→ frågan om jämn/udda meninglös
f ej periodisk

Tecken : $f(x) = \sqrt{\dots} + \sqrt{\dots} \geq 0 \quad \forall x \in D_f$

$f(x) = 0$ skulle endast vara möjligt om båda rötterna blir 0 samtidigt (ty både ≥ 0). Det blir de inte, så vi har $f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} & x < -1, x > -5 \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} & x > -1 \end{cases}$$

$\nexists f'$ i -1 (annars skulle $|x+1|$ varit deriverbar i -1); $f' \xrightarrow{x \rightarrow -5^+} \infty$

$f' > 0 \quad \forall x > -1 \Rightarrow$ eventuella nollställen till f' måste $\in (-5, -1)$

$$-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(x+5) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{4}$$

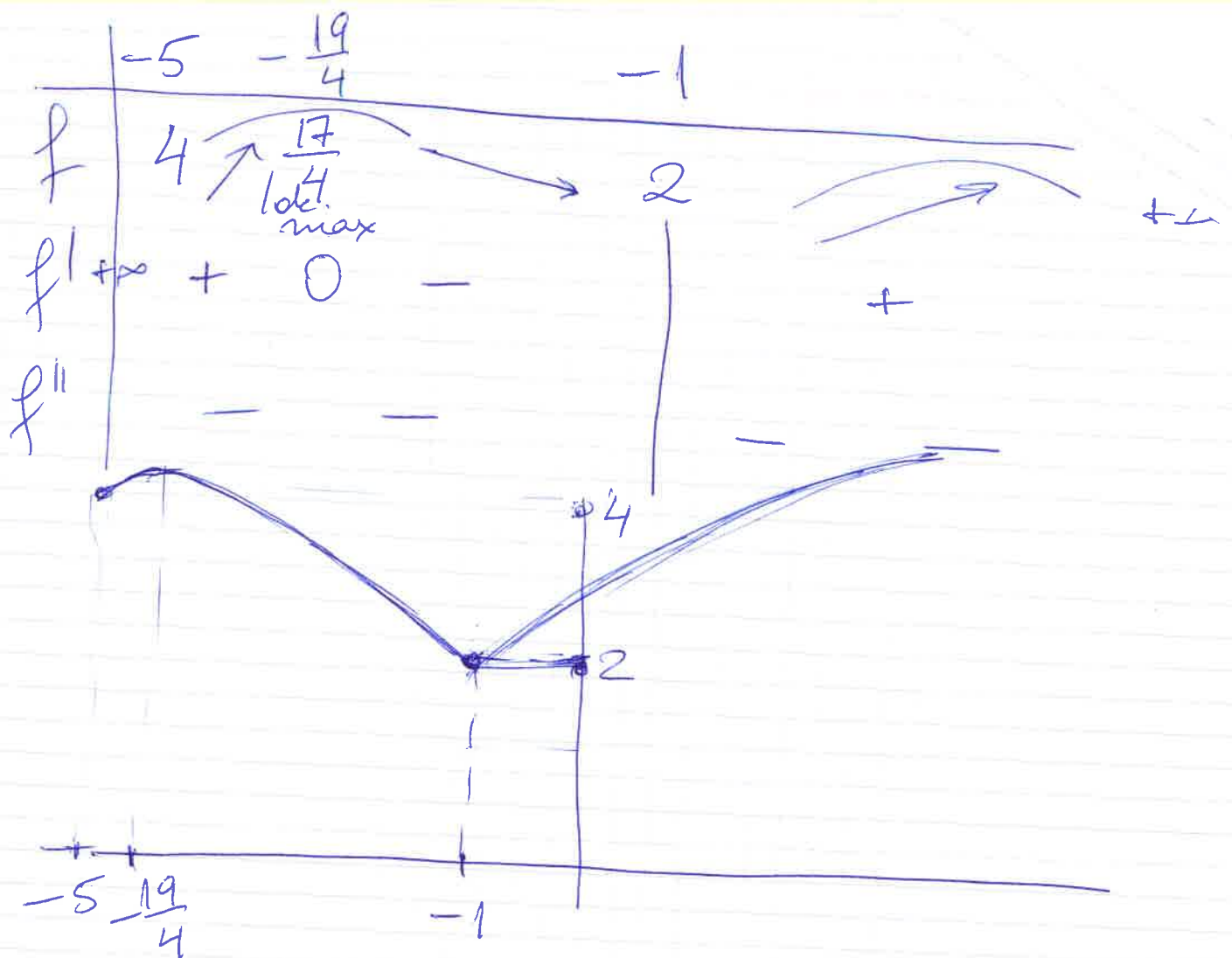
$f' > 0$ i $(-5, -\frac{19}{4})$

$f' < 0$ i $(-\frac{19}{4}, -1)$

→ f har lok. max i $-\frac{19}{4}$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{1}{(x+5)^{\frac{3}{2}}} < 0 & -5 < x < -1 \\ -\frac{1}{4} \frac{1}{(x+5)^{\frac{3}{2}}} < 0 & x > -1 \end{cases}$$

→ f konvex i $(-5, -1)$ och i $(-1, \infty)$.



(4) (a) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{\ln t^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \cdot 2 \int \ln t dt =$$

$$= 4 \left(t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt \right) = 4t (\ln t - 1) =$$

$$= 4\sqrt{x+1} \left(\frac{1}{2} \ln(x+1) - 1 \right)$$

(OBS! Ein primitiv)

(b) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cdot \sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \sqrt{\cos x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x) \sqrt{\cos x} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x} \, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x} \, dx = \\
&= -\int (\cos x)' \sqrt{\cos x} \, dx = -\frac{(\cos x)^{3/2}}{3/2} + C \\
\Rightarrow I &= \left[\frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \left[\frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \left(\frac{2}{3} - 0 \right) - \left(0 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \quad (\text{se även 7a})
\end{aligned}$$

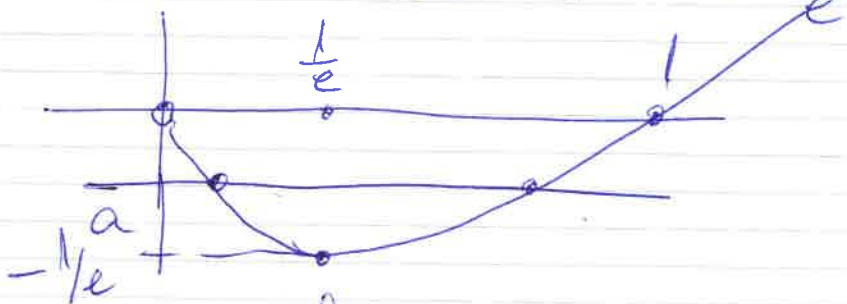
5. $f(x) = x \ln x$ $D_f = (0, \infty)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$f'(x) = \ln x + 1$
 $f'(\frac{1}{e}) = 0$ (enda nollstället)

x	0	$\frac{1}{e}$	∞
f	0	$-\frac{1}{e}$	∞
f'	$-$	0	$+$

$f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

$\Rightarrow f$ har minsta värde i $\frac{1}{e}$,
som är $-\frac{1}{e}$



$\Rightarrow f(x) = a$ kommer att ha två
olika reella nollställen för
 $-\frac{1}{e} < a < 0$

6. Definiera

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

6

Vi har att $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall x, \forall n \in \mathbb{N}$$

Om $f_n(x_0) = 0$ för ngt $x_0 \neq 0$,
så måste $f_n'(\xi) = f_{n-1}(\xi) = 0$
för ngt ξ mellan 0 och x_0

\Rightarrow även f_{n-1} har nollställe $\neq 0$

\Rightarrow (på samma sätt) f_{n-2} har
nollställe $\neq 0$

\dots
 $\Rightarrow f_0$ har nollställe $\neq 0$

Men, $f_0(x) = e^x - 1$ har ett
enda nollställe i 0

\Rightarrow ingen av funktionerna f_n
kan ha nollställe $\neq 0$

\Rightarrow ekvationens enda lösning är $x=0$

7. (a) Gör substitutionen $t = -x$
i integralen $\int_{-a}^0 f(x) dx$.

(b) Funktionen $x^{173} \cos x$ är udda,
använd (a).