TMA970 Inledande matematisk analys F / TM

Lösningar 21/12 – 17

1. (a) divergent; (b) konvergent;
(c) divergent; (d) divergent;
(e) divergent; (f) konvergent.

---

2. (a) $\dfrac{e^x\cos x - 1}{\tan x} = \dfrac{e^x\cos x - e^x + e^x - 1}{\tan x} =$

$= e^x \dfrac{\cos x - 1}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} + \dfrac{e^x - 1}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} =$

$= -e^x \dfrac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{\sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{1+\cos x} + \dfrac{e^x-1}{x} \cdot \dfrac{x}{\sin x} \cos x$

$\xrightarrow[x\to 0]{} -1 \cdot 0 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

(b) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4x^3+1}} = \dfrac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x\sqrt[3]{4+\frac{1}{x^3}}} \underset{\substack{x\to-\infty \\ x<0}}{=} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\sqrt[3]{4+\frac{1}{x^3}}}$, $\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x^3} \to 0$

$\xrightarrow[x\to-\infty]{} -\dfrac{1}{2^{2/3}}$

---

3. $f(x) = \ln^2 x \qquad D_f: \; x > 0$

jämn/udda: meningslöst; ej periodisk

$f(x) = 0$ omm $x = 1$

$f(x) > 0 \quad \forall x > 0,\ x \neq 1$

(⇒ f har globalt minimum i 1)

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

→ $x = 0$ vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln^2 x}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

$$f(x) - 0 \cdot x \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$$

⇒ ingen sned asymptot i ∞

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$f'(x) = 0$ omm $x = 1$

→ en enda stationär pkt, i $x = 1$

x	$0+$		1		∞
f'		$-$	0	$+$	

⇒ f har lok. min i $x = 1$
(bekräfter det vi fann tidigare)

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \ln x \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

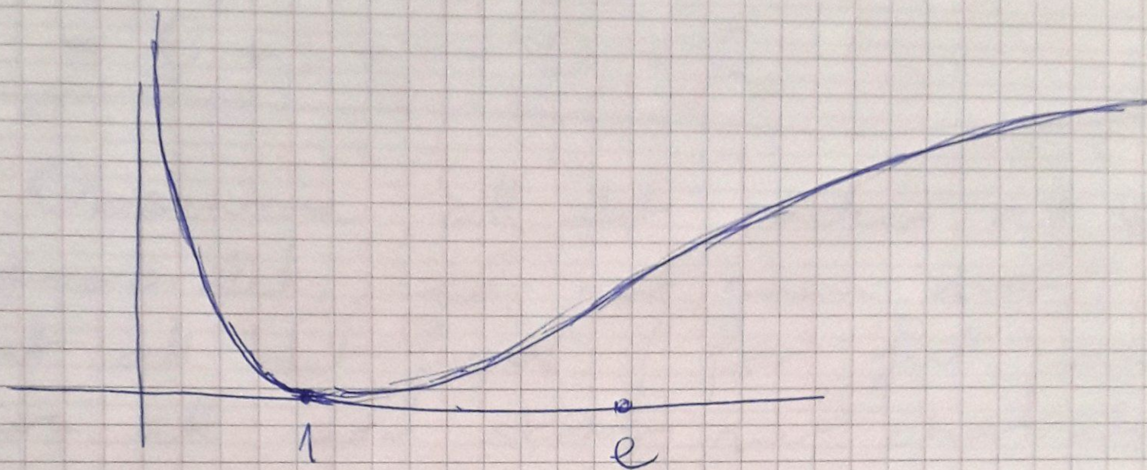
$$= 2\,\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f''(x) = 0$ omm $x = e$

x	$0+$		e		∞
f''		$+$	0	$-$	

→ f konvex i $(0, e)$, konkav i (e, ∞)
inflexion i e

x	0_+		1		e		∞
f	$+\infty$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	infl	$\nearrow$	$+\infty$
f'		$-$	0		$+$		
f''		$+$	2	$+$	0	$-$	



---

4. (a) $\int 1\cdot\arccos^2 x\,dx = x\arccos^2 x -$

$$- \int x\cdot 2\arccos x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arccos^2 x + \int \arccos x \cdot \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arccos^2 x - \int \arccos x \cdot \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arccos^2 x - 2\int \arccos x \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,dx =$$

$$= x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\,\arccos x +$$

$$+ 2\int \cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx =$$

$$= x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\,\arccos x - 2x \;(+C)$$

4

(b) $$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx = -\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 0 + 1 + 1 - 0 = 2$$

---

5. Observera att det räcker att hitta gränsvärdet, då har man även visat att det finns (för full poäng krävs att man skriver ner observationen)

(a) Det är uppenbart att $0 < a_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Det räcker alltså att visa att följden är monoton.

$$a_{n+1} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= a_n \underbrace{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\in (0,1)} < a_n$$

$\Rightarrow$ följden är monotont avtagande nedåt begränsad (av 0)

$\Rightarrow$ konvergent

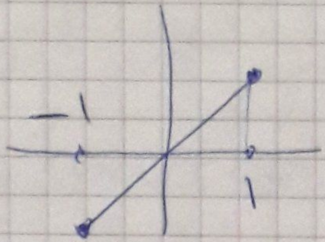
(b) $$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

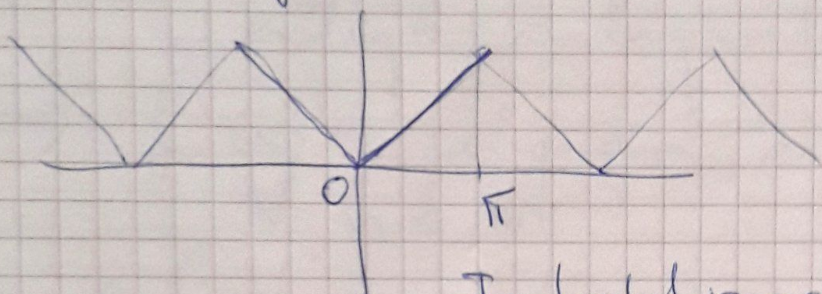
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{n}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdots\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

6. (a) $f(x) = \cos(\arccos x) = x$

$$D_f = [-1, 1]$$



$$g(x) = \arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & x \in [0,\pi] \\ \text{jämn} & \\ 2\pi\text{-periodisk} & \end{cases}$$



Induktionsbevis

(b) (1) $f_1(x) = \cos(\arccos x) = x$
polynom av grad 1

(2) Antag att $f_m(x) = \cos(m \arccos x)$
är ett polynom av grad m
med koefficient a_{mm} för x^m, för ngt $m \in \mathbb{N}$

$$f_{m+1}(x) = \cos((m+1)\arccos x) =$$
$$= \cos(m \arccos x + \arccos x) =$$
$$= \cos(m \arccos x)\cos(\arccos x) -$$
$$- \sin(m \arccos x)\sin(\arccos x) = ⊛$$

$$\Big(= x f_m(x) - \varepsilon_m \sqrt{1-\cos^2(m \arccos x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\substack{\arccos x \in [0,\pi] \\ \sin \geq 0 \text{ i } [0,\pi]}}$$

$\varepsilon_m = 1$ eller -1
beroende på m och x
Svårt att hantera! $\Big)$

6

$$f_m'(x) = + \sin(m \arccos x) \cdot \frac{+m}{\sqrt{1-x^2}}$$

enligt antagandet är

$f_m'(x)$ ett polynom av grad $m-1$

$\Rightarrow m \sin(m \arccos x) = f_m'(x)\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ $\circledast$ $= x f_m(x) - \frac{1}{m} f_m'(x)(1-x^2)$

$=$ polynom av grad $\underline{m+1}$,

enligt antagandet

$\Rightarrow f_n(x) =$ polynom av grad $\underline{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$,

enligt induktionsprincipen.

Koefficienten för x^{m+1} i $f_{m+1}(x)$:

$$a_{mm} + \frac{1}{\cancel{m}} \cdot \cancel{m} \cdot a_{mm} = 2a_{mm}$$

Induktivt fås att koefficienten för x^n i $f_n(x)$ är 2^n.

<u>Anmärkning</u> Polynomen $f_n(x)$ brukar betecknas med $T_n(x)$. De kallas Tchebyshevpolynom, efter den ryske matematikern Tchebyshev, och har många extremala egenskaper.