TMA970 Inledande matematisk analys F1/TM1

Lösningar 9/1 - 2019

1. (a) konvergent; (b) divergent;
(c) divergent; (d) divergent;
(e) konvergent; (f) konvergent.

---

2. (a) Sätt $t = \frac{1}{x}$

$x \to \infty \iff t \to 0_+$

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{(1+mt)^n - (1+nt)^m}{t^2} = (\text{för } n, m \geq 2)$$

$$= \lim_{t \to 0_+} \left(\frac{\cancel{1} + \cancel{n \cdot mt} + \frac{n(n-1)}{2} m^2 t^2 + \binom{n}{3} m^3 t^3 + \dots + t^n - \cancel{1} - \cancel{m \cdot nt} - \frac{m(m-1)}{2} n^2 t^2 - \binom{m}{3} n^3 t^3 - \dots - t^m}{t^2} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0_+} \left(\frac{n(n-1)}{2} \cdot m^2 - \frac{m(m-1)}{2} n^2 \right) \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} +$$

$$+ \lim_{t \to 0_+} t \left(\begin{matrix} \text{ändligt antal} \\ \text{termer} \end{matrix} \right) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} m^2 - \frac{m(m-1)}{2} n^2 = \frac{\cancel{m^2n^2} - m^2 n - \cancel{m^2n^2} + mn^2}{2}$$

$$= \frac{mn(n-m)}{2}$$

$m, n \geq 1$: egentligen ingen skillnad, samma svar

(Om man anser att $0 \in \mathbb{N}$: om ngt av talen m, n är 0, så är funktionen identiskt $= 0$.)

(b) $(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + (e^x - 1 + x)\right)^{\frac{1}{x}} =$

$$= \left(\left(1 + \underbrace{(e^x - 1 + x)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}\right)^{\frac{1}{e^x - 1 + x}}\right)^{\frac{e^x - 1 + x}{x}}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} e^{1+1} = e^2$$

(p.g.a. kontinuitet)

---

3. $f(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde)

f jämn

$y = 0$ horisontell asymptot i $\pm\infty$

$$f'(x) = (\cancel{2x} - \cancel{4}2x - 2x^3)e^{-x^2} =$$

$$= -2x(1 + x^2)e^{-x^2}$$

$f'(x) = 0$ för $x = 0$

x		0	
f'	+	0	−

$\Rightarrow f$ har lok. max i 0

$$f''(x) = (-2-6x^2+4x^2+4x^4)e^{-x^2} =$$

$$= (4x^4-2x^2-2)e^{-x^2} =$$

$$= 2(2(x^2)^2 - x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$f''=0$: $(x^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1$, $\cancel{-\frac{1}{2}}$

$(x^2 \geq 0)$

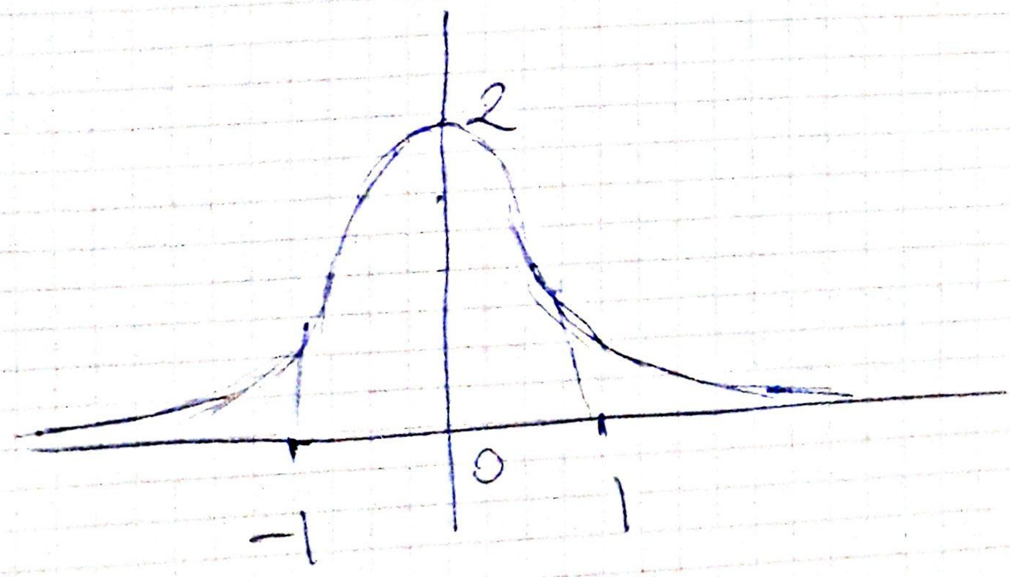
$\Rightarrow f''=0$ för $x = \pm 1$

x	0		1		∞
f''		$-$	0	$+$	

(räcker, p.g.a. symmetri)

$\Rightarrow f$ har inflexion i $(\pm 1, f(\pm 1))$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$y=0$	$\nearrow$	infl.	$\nearrow$	2 max	$\searrow$	infl.	$\searrow$	$y=0$
f'		$+$	$+$		0		$-$	$-$	
f''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	



4

(4.) (a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}$

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$

$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2$$

$x=2$: $1 = 0 + B + 0 \Rightarrow B = 0+1 = 1$

$x=0$: $1 = -10A + 5B + 4D$

x^3 : $0 = A + C$

x^2 : $0 = -6A + B - 4C + D$

$$\begin{cases} 1 = -10A + 5 + 4D \\ 0 = -6A + 1 + 4A + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10A + 4D = -4 & (-1) \\ -2A + D = -1 & \cdot 5 \end{cases}$$

$D = -1 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0$

(Kan göras kortare om man ser att f är en funktion av $(x-2)^2$.)

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) \quad (+C)$$

(b) Partiell integration

$x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$

4

$$\int_1^2 x \arccos\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}\right]_1^2 -$$

$$- \int_1^2 \frac{\cancel{x^2}}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)dx =$$

$$= 2\arccos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos 1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\int\frac{(x^2-1)'\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-1}\right]_1^2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5.

$$\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} = \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= (\arctan x)'$$ överallt, där

funktionerna är definierade

$\Rightarrow$ skillnaden mellan f och g är konstant, men olika konstanter på de två intervallen

$(-\infty, 1)$: $x=0$ $\quad f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$g(x)\Big|_{x=0} = \arctan 0 = 0$$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + \frac{\pi}{4}$ i $(-\infty, 1)$ 6

$(1, +\infty)$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(x) = g(x) - \frac{3\pi}{4}$ i $(1, \infty)$

6.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000^{n+1}/(n+1)!}{1000^n/n!} = \frac{1000}{n+1}$$

$\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$ för $n \leq 999$

$x_{n+1} < x_n$ för $n > 999$

$\Rightarrow \max_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}$

$(\Rightarrow \exists$ största element$)$