

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2019-01-09, kl. 14:00 – 18:00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Edvin Wedin, ankn. 5325, besöker salen ca 15:00 och 17:00.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \int_{100}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}; & \text{(b)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; & \text{(c)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|}; \\ & \text{(d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{-x} + x^2} dx; & \text{(e)} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx; & \text{(f)} \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \end{aligned}$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger $0p$; hela uppgiften ger minst $0p$.)

2. Bestäm gränsvärdena ($m, n \in \mathbb{N}$; OBS! L'Hospitals regel får ej användas.)

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{m}{x}\right)^n - \left(1 + \frac{n}{x}\right)^m \right) \quad (3p); \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$. (3p)

$$\text{(b)} \text{ Beräkna } \int_1^2 x \arccos \frac{1}{x} dx. \quad (3p)$$

5. Visa att funktionerna $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ och $g(x) = \arctan x$ har samma derivata (i) i intervallet $(-\infty, 1)$ och (ii) i intervallet $(1, \infty)$, och härled sambandet mellan funktionerna f och g . (6p)

6. Visa att talföljden $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, där

$$x_n = \frac{1000^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

har ett största element, och bestäm $\max_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (6p)

- 7.(a)** Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)
(b) Använd satsen för att härleda derivatan av $f(x) = \arctan x$. (2p)
- 8.(a)** Formulera och bevisa satsen om partiell integration för primitiva funktioner. (4p)
(b) Ge exempel på fyra olika typer av funktioner, vilkas primitiva hittas med hjälp av partiell integration. (2p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM