

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2017-10-26, kl. 8:30 – 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, ankn. 5325, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^\infty x e^{-x} dx; & \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+16}} dx; & \quad \text{(c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^3+1} dx; & \quad \text{(e)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln 2x} dx; & \quad \text{(f)} \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x} dx; \end{aligned}$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger $0p$; hela uppgiften ger minst $0p$.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) \quad (3p); \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(\frac{\pi}{3}-x)} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}$. (3p)

(b) Beräkna $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$. (3p)

5. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$. (6p)

6. Funktionen $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och jämn.

(a) Visa att f har en udda primitiv funktion i $(-a, a)$. (4p)

(b) Är det sant att alla primitiva till f i $(-a, a)$ är udda? Motivera! (Du får använda resultatet i (a) även om du inte visat det.) (2p)

7. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (6p)

8. (a) Härled universalsubstitutionen för integraler av rationella funktioner av $\sin x$ och $\cos x$. Visa att substitutionen leder till en integral av en rationell funktion av den nya variabeln. (6p)

(b) Använd substitutionen från (a) för att bestämma en primitiv till funktionen $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. (2p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM