

TMA 970 Inledande matematisk analys F/TM

1

Lösningar 27/8-2021

- ① (a) falskt; (b) falskt; (c) falskt;
(d) sant; (e) falskt; (f) falskt.

② (a) $\lim_{x \rightarrow p} (x-p)^{-1} \ln \frac{x}{p} = \left[\begin{array}{l} x-p=t \\ x \rightarrow p \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right]$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{p+t}{p} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{t}{p} \right) =$$
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{p} \right)}{\frac{t}{p} - p} \rightarrow \frac{1}{p}$$

(b) $x \sqrt[3]{\sin \frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, ty $\sqrt[3]{\sin \dots}$ $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ begränsad

③ $f(x) = e^{2x-x|x|}$ $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ i $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = "e^{-\infty}" = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = "e^{+\infty}" = \infty$$

inga vertikala asymptoter
horisontell asymptot i $+\infty$
i $-\infty$: $\frac{e^{2x+x^2}}{x} \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ ingen asymptot i $-\infty$
inga symmetrier

2

! $f'(x) = e^{2x-x|x|} (2-2|x|)$
 (se lösningarna till tenten oktober 2020)
 $= 2(1-|x|)e^{2x-x|x|}$ skä redovisas

$f' = 0$ i ± 1

x	$-\infty$	-1	1	∞
f'	$-$	0	0	$-$

$\Rightarrow f$ har lok. min i -1 ; lok. max i 1

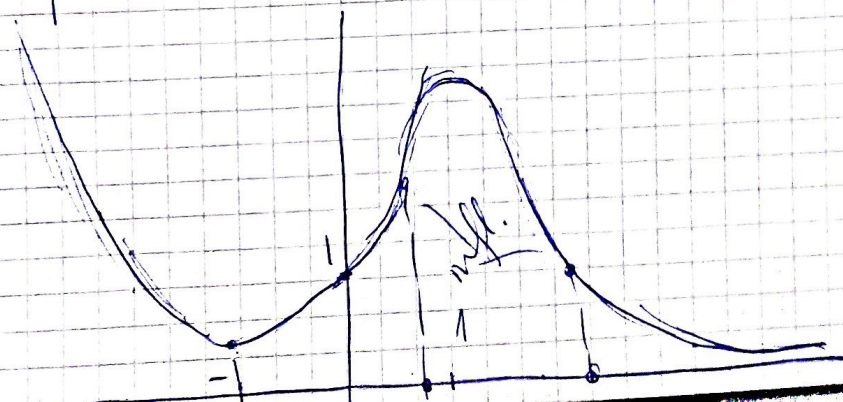
f'' : finns ej i 0
 $x < 0$: $f''(x) = 2e^{2x+x^2} (1 + (1+x)(2x+2)) =$
 $= 2e^{2x+x^2} (2x^2 + 4x + 3) > 0 \quad \forall x < 0$

$x > 0$: $f''(x) = 2e^{2x-x^2} (-1 + (1-x)(2-2x)) =$
 $= 2e^{2x-x^2} (2x^2 - 4x + 1)$
 ngra reella nollställen

$f'' = 0$: $\frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	0	$(2-\sqrt{2})/2$	$(2+\sqrt{2})/2$	$+\infty$
f''	$+$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'' = 2$	0	0	$+$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\downarrow$ lok. min $(1/e)$	$\rightarrow 1$	$\nwarrow$ $\rightarrow$ lok. max (e)	$\nwarrow$ $\rightarrow$	$\rightarrow$	0
f'	$-$	0	$+$	0	$-$		
f''	$+$	$\rightarrow 2$	0	$-$	0	$+$	



4. (a) $\int \frac{(x-2)\sqrt[3]{x}}{x-2+\sqrt[3]{x}} dx$

Sätt $\sqrt[3]{x} = t, x = t^3, dx = 3t^2 dt$

$$\int \frac{(t^3-2) \cdot t \cdot 3t^2}{t^3-2+t} dt = \int \frac{3t^3(t^3-2)}{(t-1)(t^2+t+2)} dt$$

Standard; polynomdivision
därefter partialbräksuppdelning

$$\frac{A}{t-1}, \quad \frac{Bt+C}{t^2+t+2} = \frac{B(t+\frac{1}{2}) + (C-\frac{B}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

ger $\ln|t-1|$

ger $\ln(t^2+t+2)$ & arctan $\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}$

OBS! Därefter: substitution
tillbaka $t = \sqrt[3]{x}$

(b) $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-2x} dx$ konvergent, p.g.a. att $e^{-2x} \rightarrow 0$ snabbare än en godtycklig potens av x

$$\int_0^\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p$$

$$I_n = \int_0^p x^n e^{-2x} dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} \left[-\frac{1}{2} x^n e^{-2x} \right]_0^p + \frac{1}{2} \int_0^p n x^{n-1} e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} p^n e^{-2p} + \frac{n}{2} I_{n-1,p}$$

$$p \rightarrow \infty : I_n = 0 + \frac{n}{2} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2^2} I_{n-2}$$

$$= \dots = \frac{n!}{2^n} I_0$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^p = \frac{1}{2}$$

⑤ $P(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$
 $P(0) < 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P = +\infty$

④

$\Rightarrow$ finns minst en reell rot till $P(x) = 0$

$$P'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x =$$

$$= 6x(8x^2 - 7x - 1)$$

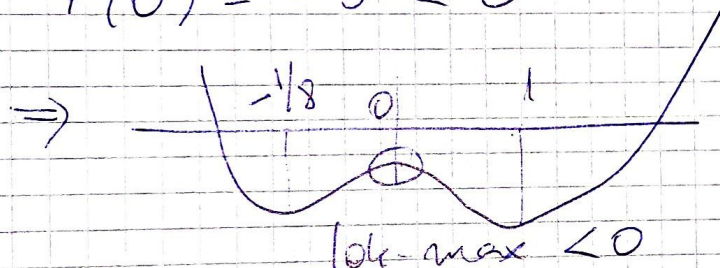
rotställen:

x	$-1/8$	0	1	$\frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2 \cdot 8} = \frac{7 \pm 9}{16}$	< 1 $< -\frac{1}{8}$
P'	$-0 + 0 - 0 +$				

$\Rightarrow P$ har lok. min i $-\frac{1}{8}$ och i 1
 lok. max i 0

$$P(1) = 12 - 14 - 3 - 5 < 0$$

$$P(0) = -5 < 0$$



$\Rightarrow P$ har två reella rotställen

⑥ Beträkna $f'(a) = B$, $f(a) = A > 0$

$f'' \leq 0 \Rightarrow f'$ avtagande

$\Rightarrow f' \leq B$ i $[a, \infty)$, där $B < 0$

Medelvärdesatsen:

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) \quad \forall x > a,$$

där $a < \xi < x$

$$\Rightarrow f(x) = A + \underbrace{f'(\xi)}_{\leq B} \underbrace{(x-a)}_{> 0} \leq A + \underbrace{B}_{< 0} \underbrace{(x-a)}_{> 0}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$

$f(a) = A > 0 \Rightarrow \exists$ nollställe $> a$

entydighet: $f' < 0 \Rightarrow f$ strängt avtagande
 $\Rightarrow$ upprepar ej värdet 0