

TMA970

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM

Datum: 2021-08-27, kl. 8:30 – 12:30.

Hjälpmedel: Alla, dock ej samarbete och konsultationer.

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531; svarar på frågor i Zoom ca 10:00.

=====

1. Funktionen f är deriverbar i $\mathbb{R}$. Sant eller falskt? Ge endast svar.

(a) Om f är begränsad, så är f' begränsad.

(b) Om f' är begränsad, så är f begränsad.

(c) Om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$.

(d) Om $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(e) Om $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, så gäller $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \neq 0$.

(f) Om $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ (ändligt), så gäller $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (ändligt).

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1 p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger dock minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow p} (x-p)^{-1} \ln \frac{x}{p} \quad (p > 0) \quad (3p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt[3]{\sin \frac{1}{x^3}} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{2x-x|x|}$. Ange gränsvärden, lokala extrema och inflexionspunkter. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $\frac{(x-2)\sqrt[3]{x}}{x-2+\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 1$. (3p)

(b) Beräkna integralen $\int_0^\infty x^n e^{-2x} dx$, där n är ett positivt heltal. Motivera väl! (5p)

5. Bestäm antalet reella lösningar till ekvationen $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$. (5p)

6. Funktionen f är två gånger deriverbar i intervallet $[a, \infty)$. Givet att f uppfyller $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$, samt $f''(x) \leq 0$ för alla $x \in [a, \infty)$, visa att f har exakt ett nollställe i det öppna intervallet (a, ∞) . (4p för bevis av existens, 2p för bevis av entydighet)

7. Visa att funktionerna $\sin$ och $\cos$ är kontinuerliga i 0. (3p) Visa (direkt) att funktionen $\arctan$ är kontinuerlig i 0. (3p)

8. Funktionen $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att det finns en punkt $\xi \in [-\pi, \pi]$ sådan att

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos x \, dx = \sqrt{2} f(\xi). \quad (6p)$$

(Du får använda analysens huvudsats, även kallad Newton-Leibniz sats, i beviset.)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM