Dubbelintegraler

Vi börjar med en axelparallell rektangel

$$\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

Definition. En funktion Φ definierad på Δ kallas en *trappfunktion* om det finns en indelning av Δ i delrektanglar

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x < x_i,\ y_{j-1} \leq y < y_j\},$$
$$1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

så att Φ har ett konstant värde c_{ij} på Δ_{ij}.
Arean (*måttet*) av Δ_{ij} är

$$\mu(\Delta_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Definition. Dubbelintegralen av Φ över Δ är

$$\iint_\Delta \Phi(x, y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\mu(\Delta_{ij}).$$

Följande regler gäller:

(1) $$\iint_\Delta \alpha\Phi\,dxdy = \alpha \iint_\Delta \Phi\,dxdy \quad (\alpha \text{ konstant})$$

(2) $$\iint_\Delta (\Phi + \Psi)\,dxdy = \iint_\Delta \Phi\,dxdy + \iint_\Delta \Psi\,dxdy$$

(linjaritetsegenskaper),

(3) $$\Phi \le \Psi \text{ på } \Delta \quad \Rightarrow \quad \iint_\Delta \Phi\,dxdy \le \iint_\Delta \Psi\,dxdy$$

(monotonitetsegenskapen),

(4) $$\Big|\iint_\Delta \Phi\,dxdy\Big| \le \iint_\Delta |\Phi|\,dxdy$$

(triangelolikheten),

(5) Om $\Delta_1,\ \Delta_2$ är en indelning av Δ så är

$$\iint_\Delta \Phi\,dxdy = \iint_{\Delta_1} \Phi\,dxdy + \iint_{\Delta_2} \Phi\,dxdy,$$

(6) $$\iint_\Delta \Phi\,dxdy = \int_a^b \Big\{ \int_c^d \Phi(x,y)\,dy \Big\} dx = \int_c^d \Big\{ \int_a^b \Phi(x,y)\,dx \Big\} dy$$

(upprepad (itererad) integration).

Låt $f(x, y)$ vara en begränsad funktion på Δ. Betrakta alla trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ på Δ. Då är (förstås) $\iint_\Delta \Phi\, dxdy \leq \iint_\Delta \Psi\, dxdy$. Man säger att f är *(Riemann-)integrerbar* om skillnaden mellan $\iint_\Delta \Psi\, dxdy$ och $\iint_\Delta \Phi\, dxdy$ kan göras godtyckligt liten.

Sats 1. Om f är integrerbar över Δ så finns exakt ett tal λ sådant att

$$\iint_\Delta \Phi\, dxdy \leq \lambda \leq \iint_\Delta \Psi\, dxdy$$

för alla Φ och Ψ med $\Phi \leq f \leq \Psi$.

Definition. Detta tal λ kallas *dubbelintegralen* av f över Δ.

Egenskaperna (1)–(5) gäller fortfarande. Även (6):

Sats 2. Om f är integrerbar över Δ så är

$$\begin{aligned}\iint_\Delta f\, dxdy &= \int_a^b \Big\{ \int_c^d f(x, y)\, dy \Big\} dx \\ &= \int_c^d \Big\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \Big\} dy\end{aligned}$$

om integralerna i högerledet existerar.

Kontinuerliga funktioner är integrerbara:

Sats 3. Om f är kontinuerlig på Δ, så är f integrerbar över Δ. Vidare existerar $\int_a^b \{\int_c^d f(x,y)\,dy\}dx$ och $\int_c^d \{\int_a^b f(x,y)\,dx\}dy$, så formeln i Sats 2 gäller.

Antag $f(x,y)$ är begränsad på en begränsad mängd D. Utvidga f till en rektangel Δ som omfattar D genom att låta funktionen vara 0 utanför D; kalla den utvidgade funktionen för f_D.

Definition. f är integrerbar över D, om f_D är integrerbar över Δ. Vi sätter då

$$\iint_D f\,dxdy = \iint_\Delta f_D\,dxdy.$$

Motsvarigheter till reglerna (1)–(5) gäller. För upprepad integration har vi följande sats.

Sats 4. Antag att D är av formen

$$D = \{(x,y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ a \le x \le b\}$$

där α och β är kontinuerliga. Om f är kontinuerlig på D, är f integrerbar, och

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \Big\} dx.$$

Variabelsubstitution

Låt

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

vara en bijektiv C^1-avbildning, där området D i xy-planet motsvaras av E i uv-planet. Vi har följande formel för variabelsubstitution (se Sats 6 i boken)

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv$$

Observera absolutbeloppet av funktionaldeterminanten! Formeln motiveras av att $|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}|$ betyder den lokala areaförstoringen. Vi skriver symboliskt

$$dxdy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv$$

Exempel: Vid övergång till polära koordinater gäller

$$dxdy = r\, drd\varphi$$

Trippelintegraler

Trippelintegraler införs på liknande sätt som dubbelintegraler.

Upprepad integration:
1. Om området D i $\mathbb{R}^3$ är av formen

$$\alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), \quad (x, y) \in D_1$$

är

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D_1} \left\{ \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right\} dxdy.$$

2. Låt D_z vara skärningen mellan D och ett plan parallellt med xy-planet (med z-koordinat z). Om D_z är icke-tom för $a \leq z \leq b$, så är

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left\{ \iint_{D_z} f(x, y, z)\, dxdy \right\} dz.$$

Variabelsubstitution:

Vid övergång till nya koordinater u, v och w gäller för volymselementet

$$dV = dxdydz = \left|\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Exempel: Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$dV = dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$