Definition av dubbelintegral

Här följer en alternativ framställning av definitionen av dubbelintegral (jämför Persson-Böiers, sid. 202–203).

Låt f vara en begränsad funktion på Δ. Sätt

$$M_1 = \{\Phi : \Phi \text{ trappfunktion, } \Phi \leq f\},$$
$$M_2 = \{\Psi : \Psi \text{ trappfunktion, } f \leq \Psi\}.$$

Eftersom f är begränsad, är M_1 och M_2 icke-tomma. Då existerar

$$\lambda_1 = \sup_{\Phi \in M_1} \iint_\Delta \Phi \, dxdy, \qquad \lambda_2 = \inf_{\Psi \in M_2} \iint_\Delta \Psi \, dxdy.$$

För alla $\Phi \in M_1$ och $\Psi \in M_2$ är $\Phi \leq f \leq \Psi$, så att $\iint_\Delta \Phi \, dxdy \leq \iint_\Delta \Psi \, dxdy$, varför $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Det gäller alltså att

$$\iint_\Delta \Phi \, dxdy \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \iint_\Delta \Psi \, dxdy \quad \text{för alla } \Phi \in M_1 \text{ och } \Psi \in M_2. \tag{1}$$

Definition. Funktionen f är (Riemann-)integrerbar över Δ om $\lambda_1 = \lambda_2$. Om f är integrerbar kallas det gemensamma värdet $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ för dubbelintegralen av f över Δ,

$$\lambda = \iint_\Delta f(x, y) \, dxdy = \iint_\Delta f \, dxdy.$$

Definitionerna av sup och inf visar att f är integrerbar om och endast om det till varje $\epsilon > 0$ finns $\Phi \in M_1$, $\Psi \in M_2$ så att

$$\iint_\Delta \Psi \, dxdy - \iint_\Delta \Phi \, dxdy < \epsilon. \tag{2}$$

Om nämligen f är integrerbar och $\epsilon > 0$, så finns $\Phi \in M_1$ och $\Psi \in M_2$ så att $\iint_\Delta \Phi \, dxdy > \lambda - \frac{\epsilon}{2}$, $\iint_\Delta \Psi \, dxdy < \lambda + \frac{\epsilon}{2}$, varför (2) gäller. Omvänt, om (2) gäller, så är $\lambda_2 \leq \iint_\Delta \Psi \, dxdy < \iint_\Delta \Phi \, dxdy + \epsilon \leq \lambda_1 + \epsilon$, dvs. $\lambda_2 < \lambda_1 + \epsilon$ för alla $\epsilon > 0$, $\lambda_2 \leq \lambda_1$, $\lambda_1 = \lambda_2$, f är integrerbar.

Sats 1 i boken (att det finns precis ett tal λ så att $\iint_\Delta \Phi \, dxdy \leq \lambda \leq \iint_\Delta \Psi \, dxdy$ för alla Φ och Ψ) är nu uppenbar. Existensen av λ var ju klar redan i (1), och entydigheten följer av (2) som i boken.