MATLAB-övningar för Reell matematisk analys för F1, 2005

Kjell Holmåker

17 januari 2005

Dessa övningar visar bl.a. hur MATLAB kan användas för att åskådliggöra ytor och kurvor i tre dimensioner. Övningarna avser att träna hanterandet av MATLAB och att illustrera centrala begrepp från kursen.

1. a. Rita ytan $z = f(x,y) = e^{x^4(x-2)^4+y^6(y-2)^6}$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$. Rita i samma figur tangentplanet till ytan i punkten (x_0, y_0, z_0), där $x_0 = y_0 = 1.1$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Rita tangentplanet för $0.5 \le x \le 1.5$, $0.5 \le y \le 1.5$. Du kan behöva vrida figuren (kommando `rotate3d`) för att tangentplanet skall synas tydligt. Rita även i samma figur den uppåtriktade enhetsnormalen i punkten (x_0, y_0, z_0). Ser den ut som en normalvektor? Om inte, varför inte?

b. Rita ytan $z = e^y[y + 1 + (y-1)\sin x]$ för lämpliga värden på x och y (experimentera med olika val). Vrid och vänd på figuren så att minimipunkterna syns tydligt. Ser du några lokala maximipunkter? Illustrera också minimipunkterna genom att rita nivåkurvor (se `help contour`).

2. (Taylorpolynom) I MATLAB hanteras ju polynom i en variabel genom att koefficienterna läggs i en vektor. Så t.ex. motsvaras polynomet $3x^2 - 4x + 2$ av vektorn `[3 -4 2]`. Polynom kan multipliceras med kommandot `conv`. Om $p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^{m-j}$ och $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}$ är två polynom, så är nämligen produkten $p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^{m+n-i}$, där $c_i = \sum_{k=\max(0,i-m)}^{\min(i,n)} a_{i-k} b_k$, så att följden $\{c_i\}$ är den diskreta faltningen (*convolution* på engelska) av följderna $\{a_j\}$ och $\{b_k\}$. Exempel: Multiplicera $3x^2 - 4x + 2$ med $x + 1$.

```
»p=[3 -4 2]; q=[1 1];
»conv(p,q)
```

ger svaret `[3 -1 -2 2]`. Det finns däremot ingen färdig funktion för att addera polynom. Det är dock lätt att definiera en funktion som gör detta, t.ex. så här:

```
function sum=polyadd(p,q)
%polyadd(p,q) ger summan av polynomen p och q
t=length(q)-length(p);
sum=[zeros(1,t) p]+[zeros(1,-t) q];
```

Testa med `p` och `q` i exemplet ovan.

För polynom i två variabler kan man på samma sätt låta koefficienterna definiera en matris. Polynomet $p(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x^{m-i} y^{n-j}$ kan man låta representeras av $m \times n$-matrisen `P` med element `P(i,j)=`$\mathtt{p}_{\mathtt{i,j}}$. Det finns ett kommando `conv2` för tvådimensionell faltning som man kan använda för att multiplicera polynom i två variabler. Testa genom att t.ex. multiplicera $p(x,y) = x^3 + 2x^2y - 4xy - 3y^2 + 1$ och $q(x,y) = x^2 + y - 2x$. Definiera tillhörande matriser `P` och `Q` och kontrollera att `conv2(P,Q)` ger det förväntade resultatet. För addition av polynom i två variabler kan man modifiera funktionen `polyadd` ovan. Gör det, dvs. skriv en funktionsfil för addition av två polynom i två variabler. Man måste lägga till rader och kolonner bestående av nollor på lämpliga ställen för att matriserna skall få samma storlek. Testa med `polyadd(P,Q)`.

Ovanstående funktioner kan underlätta framtagandet av Taylorpolynom till funktioner i två variabler. Betrakta t.ex. funktionen $f(x,y) = \ln(1 + x + y)\sin(x + y^2)$ i närheten av origo. Med hjälp av envariabelutvecklingarna $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \cdots$ och $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \cdots$ får vi

$$f(x,y) = [x + y - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3 - \cdots][x + y^2 - \frac{1}{6}(x+y^2)^3 + \cdots].$$

Man ser att vi har behov av att beräkna successiva potenser av vissa polynom (i detta fall $x+y$ och $x+y^2$). Låt oss också definiera en funktion för detta:

```
function pot=polypot(p,n)
%polypot(p,n) ger n:te potensen av ett polynom p i två variabler
p1=p;
for k=1:n-1
 p1=conv2(p1,p);
end
pot=p1;
```

Om vi vill ha Taylorpolynomet av grad fyra av $f(x,y)$ kring origo tar vi med de utskrivna termerna ovan och får följande approximerande polynom:

```
»p=[0 1;1 0]; q=[0 0 1;1 0 0];
»f1=polyadd(p,-(1/2)*polypot(p,2));
»f1=polyadd(f1,(1/3)*polypot(p,3));
»f2=polyadd(q,-(1/6)*polypot(q,3));
»fappr=conv2(f1,f2);
```

Det är dock bara en triangel i det nedre högra hörnet av den resulterande matrisen som vi behöver för Taylorpolynomet.

```
»[ma,na]=size(fappr);
»t4=fappr(ma-4:ma,na-4:na);
»t4=fliplr(tril(fliplr(t4)))
```

Matrisen `t4` ger nu Taylorpolynomet av grad fyra i origo. I detta enkla exempel går det säkert fortare att räkna ut Taylorpolynomet för hand, men ovanstående kan lätt tillämpas i mer komplicerade fall.

Använd nu denna (eller någon annan) metod för att beräkna Taylorpolynomet i origo av grad åtta till funktionen

$$f(x,y) = \sin(2x + y^2)e^{-\frac{x^2+y}{4}}.$$

Jämför $f(x,y)$ med Taylorpolynomet genom att rita funktionerna i samma diagram för $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

3. (Dubbelintegraler) Om en dubbelintegral är för komplicerad för exakt beräkning, kan man tillgripa numerisk approximation. Låt oss betrakta $\iint_D e^{x^2y^3}dxdy$, där

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \varphi(x) = (x+1)e^{-x/2},\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Genom upprepad integration har vi

$$\iint_D e^{x^2y^3}dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\varphi(x)} e^{x^2y^3}dy \right\} dx.$$

Vi kan dela in intervallet $[0,1]$ i delintervall med delningspunkter x_k och beräkna de inre integralerna $\int_0^{\varphi(x_k)} e^{x_k^2y^3}dy$ med kommandot `quad`. Man måste skriva en funktionsfil för beräkning av $e^{x^2y^3}$. Då skall y vara den första variabeln, och den andra variabeln x skickas med som en parameter (läs `help quad`). Sedan kan man beräkna den yttre integralen med någon standardmetod, förslagsvis Simpsons metod. Skriv en funktionsfil som beräknar integralerna $\int_0^{\varphi(x_k)} e^{x_k^2 y^3} dy$ med `quad` och sedan använder Simpsons formel på dessa värden för att få den yttre integralen.

Det finns ett kommando `dblquad` som gör ungefär detta. Det måste dock vara konstanta gränser, dvs. integrationsområdet måste vara en axelparallell rektangel. Genom en variabelsubstitution $y = t\varphi(x)$ i den inre integralen, kan vi åstadkomma detta:

$$\iint_D e^{x^2y^3} dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \varphi(x) e^{x^2(t\varphi(x))^3} dt \right\} dx.$$

Använd `dblquad` på denna integral. Jämför med föregående resultat.

4. a. En elliptisk torus T ges av

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\,(b + a\cos\theta) \\ y = \sin\varphi\,(c + a\cos\theta) \\ z = a\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

där a, b och c är positiva konstanter ($a < \min(b, c)$). Rita en typisk torus; tag t.ex. $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$. Använd `axis('equal')`.

Motsvarande tredimensionella kropp ges av

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\,(b + r\cos\theta) \\ y = \sin\varphi\,(c + r\cos\theta) \\ z = r\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Beräkna för hand volymen av denna kropp med formeln

$$V = \iiint_K dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| \frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, \theta)} \right| dr\, d\varphi\, d\theta\,.$$

Teckna arean av T som en dubbelintegral. Beräkna den numeriskt (använd kommandot `dblquad`) i fallet $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$.

b. Betrakta en rymdkurva, som t.ex. spiralen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (b\cos t, b\sin t, ct)$, $0 \le t \le 4\pi$. Rita t.ex. med $b = 1$, $c = 0.2$. Ibland kan en kurva synas bättre om den görs ”tjock”, dvs. omges av ett rör. För att konstruera ett sådant rör inför vi ett koordinatsystem som följer med kurvan. Med beteckningar enligt Persson-Böiers har vi enhetstangentvektorn

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'_t}{|\mathbf{r}'_t|} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}(-b\sin t, b\cos t, c).$$

Huvudnormalen är

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}'_t}{|\mathbf{e}'_t|} = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

och binormalen är

$$\mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}(c\sin t, -c\cos t, b).$$

Nu kan vi få ett rör kring kurvan genom att lägga en cirkel med radien a i normalplanet:

$$\mathbf{r} = (b\cos t, b\sin t, ct) + a\cos\theta\,\mathbf{n} + a\sin\theta\,\mathbf{b}\,.$$

Välj $a = 0.05$ och rita ytan parametriserad av t och θ, $0 \le t \le 4\pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

5. (Partiell differentialekvation) Rita lösningsytan till differentialekvationen

$$uu'_x + (x+1)u'_y = ye^{-u},$$
$$u(x, x^2) = 0.$$

Lösningsytan $z = u(x, y)$ skall alltså innehålla kurvan $y = x^2$, $z = 0$. Parametrisera den som $x = s$, $y = s^2$, $z = 0$, och betrakta $0 \leq s \leq 1$. Bestäm med hjälp av `ode45` för ett lämpligt antal s-värden (t.ex. $s = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots,1$) karakteristiken genom punkten $(s, s^2, 0)$. Föreskriv att lösningen skall presenteras för $t = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots,1$ (se `help ode45`). Låt `[t,X]=ode45(...)` och lägg de tre kolonnerna i `X` som kolonner i tre matriser `x`, `y` och `z`. Sedan erhålls ytan som `mesh(x,y,z)`.