Potentialer och differentialformer

Definition. $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett *konservativt* fält (eller ett *potentialfält*) i ett område Ω, om $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ för någon C^1-funktion U. U kallas en *potential* till $\mathbf{F}$. Om $\mathbf{F}$ är konservativt, kallas *differentialformen* $P\,dx + Q\,dy$ *exakt*; det gäller att $dU = P\,dx + Q\,dy$.

Sats. Följande villkor är ekvivalenta:

(a) $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt, dvs. $P\,dx + Q\,dy$ är exakt;

(b) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen mellan kurvans ändpunkter;

(c) $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i Ω.

Om något (och därmed alla) av dessa villkor gäller, är

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$$

där U är en potential till $\mathbf{F}$, och γ går från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$.

Sats. (a) Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt med en C^2-potential U, så är $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

(b) Om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett *enkelt sammanhängande* område Ω, så är $\mathbf{F}$ konservativt i Ω.