**Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del A, för F1 den 20/8 2004**

1. Lös $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 4y_n = n^2 + 1$. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 4 = 0$ med lösning $r = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i2\pi/3}$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen är $y_n^{(h)} = 2^n(C_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi n}{3})$. Ansätt en partikulärlösning $y_n^{(p)} = an^2 + bn + c$ till den givna ekvationen. Insättning ger

$$\begin{aligned} &a(n+2)^2 + b(n+2) + c + 2a(n+1)^2 + 2b(n+1) + 2c + 4an^2 + 4bn + 4c \\ &= 7an^2 + (8a+7b)n + 6a + 4b + 7c = n^2 + 1. \end{aligned}$$

Då fås ekvationerna $7a = 1$, $8a + 7b = 0$, $6a + 4b + 7c = 1$ med lösning $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{8}{49}$, $c = \frac{39}{343}$. Ekvationens allmänna lösning är $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = \underline{2^n(C_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi n}{3}) + \frac{1}{7}n^2 - \frac{8}{49}n + \frac{39}{343}}$.

---

2. Lös $(x^2+1)y' + x(y^2+2y) = 0$. Ekvationen kan skrivas $\frac{dy}{y^2+2y} = -\frac{x\,dx}{x^2+1}$, om $y \neq 0$ och $y \neq -2$, och är alltså separabel. Lösningen ges av $\int \frac{dy}{y^2+2y} = -\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. Vi har $\int \frac{dy}{y^2+2y} = \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int(\frac{1}{2}\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+2})\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| = -\frac{1}{2}\ln|\frac{y+2}{y}|$, och $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, varför $\ln|\frac{y+2}{y}| = \ln(x^2+1) + C_1 = \ln[e^{C_1}(x^2+1)]$, och $|\frac{y+2}{y}| = e^{C_1}(x^2+1)$, $\frac{y+2}{y} = 1 + \frac{2}{y} = \pm e^{C_1}(x^2+1) = C(x^2+1)$, där $C$ är en godtycklig konstant, $C \neq 0$. Alltså är $\frac{2}{y} = C(x^2+1) - 1$, $y = \frac{2}{C(x^2+1)-1} = \underline{\frac{2}{Cx^2+C-1}}$. Vi kan här även tillåta $C = 0$, vilket ger lösningen $y = -2$. Dessutom är $\underline{y = 0}$ en lösning, som inte fås för någon konstant $C$. För $C \leq 0$ och $C > 1$ existerar lösningen för alla $x$. För $0 < C \leq 1$ existerar den på intervall där $x \neq \pm\sqrt{\frac{1-C}{C}}$.

---

3. a) Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, där $a_n = [\ln(n^2+2) - \ln(n^2+1)]\sqrt{n} = \sqrt{n}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1} = \sqrt{n}\ln(1 + \frac{1}{n^2+1}) = \sqrt{n}[\frac{1}{n^2+1} + O(\frac{1}{n^4})]$. Jämför med $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ Då är $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2+1} + O(\frac{1}{n^2}) \to 1 > 0$, då $n \to \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är också $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}}$.

b) Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, där $a_n = \frac{n!n^{2n}}{(3n)!}$. Det gäller att

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{2n+2}(3n)!}{(3n+3)!n!n^{2n}} = \frac{(n+1)(n+1)^2(n+1)^{2n}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)n^{2n}} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{3(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}(1+\frac{1}{n})^{2n} \to \frac{1}{27}e^2 < 1, \text{ då } n \to \infty. \end{aligned}$$

Enligt kvotkriteriet är då $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}}$.

---

4. Använd Maclaurinutveckling. Se på nämnaren först. $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ då $t \to 0$, varför

$$2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4) = 2[x^4 - \frac{1}{2}x^8 + O(x^{12})] - [2x^4 - \frac{1}{2}4x^8 + O(x^{12})] = x^8 + O(x^{12}).$$

Utveckla täljaren t.o.m. $x^8$-termer. Utvecklingarna $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + O(t^8)$ och $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}t^3 + O(t^4) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + O(t^4)$ då $t \to 0$ ger

$$\begin{aligned} (e^{x^2} - e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x + e^{-x}) &= [2x^2 + \frac{1}{3}x^6 + O(x^{10})][1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + O(x^8)] \\ &\quad -x^2[2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + O(x^8)] = \frac{13}{45}x^8 + O(x^{10}) \text{ då } x \to 0. \end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\frac{(e^{x^2} - e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x + e^{-x})}{2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4)} = \frac{\frac{13}{45}x^8 + O(x^{10})}{x^8 + O(x^{12})} = \frac{\frac{13}{45} + O(x^2)}{1 + O(x^4)} \to \underline{\frac{13}{45}} \text{ då } x \to 0.$$

---

5. Studera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Eftersom den formellt två gånger deriverade serien är $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, som har konvergensradien 1, så har serien för $f(x)$ också konvergensradien 1, och det gäller att $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ för $|x| < 1$. Alltså är $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + C_1$, och då $f'(0) = 0$, är $C_1 = 0$. Ytterligare en integrering ger $f(x) = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2$. Eftersom $f(0) = 0$, är $C_2 = 0$. Den sökta summan är $9f(\frac{1}{3}) = 9[\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{9})] = \underline{3\arctan\frac{1}{3} - \frac{9}{2}\ln\frac{10}{9}}$.

---

6. För fixt $x \in [0,1]$ gäller att $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}e^{\frac{nx}{n+x}} \to xe^x$ då $n \to \infty$. Undersök $|f_n(x) - xe^x|$. Man kan t.ex. utnyttja att $f_n(x) = g(\frac{nx}{n+x})$ för funktionen $g(t) = te^t$. Då är $|f_n(x) - xe^x| = |g(\frac{nx}{n+x}) - g(x)| = |(\frac{nx}{n+x} - x)g'(\xi)|$ för något $\xi$ (beroende på $n$ och $x$) mellan $\frac{nx}{n+x}$ och $x$, speciellt mellan 0 och 1. Nu är $\frac{nx}{n+x} - x = -\frac{x^2}{n+x}$och $g'(t) = (t+1)e^t$. Alltså är (för $0 \le x \le 1$ och $n \ge 1$)

$$|f_n(x) - xe^x| = \frac{x^2}{n+x}(\xi+1)e^{\xi} \le \frac{1}{n}2e \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså konvergerar $f_n(x)$ likformigt mot $xe^x$ på $[0,1]$ då $n \to \infty$. P.g.a. den likformiga konvergensen gäller att

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = \underline{1}.$$

---