

Tentamen i TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = x^2y - 3x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (7p)$$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 24xe^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2. \end{cases} \quad (7p)$$

3. Avgör om gränsvärdena existerar¹ och beräkna i så fall dem:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{k(k+2)},$ (4p)

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}.$ (4p)

4. a) Avgör för vilka reella tal p som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

konvergerar. (4p)

b) Avgör om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

konvergerar. (3p)

5. Bestäm den allmänna potensserie som satisfierar

$$y'' - xy' + 2y = 0.$$

Bestäm också potensseriens konvergensradie. (8p)

6. Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, 1]$. Avgör om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx$$

existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. (8p)

7. Formulera och bevisa satsen om potensseriers konvergens. (7p)

8. Formulera l'Hospitals sats. Bevisa något av fallen. (8p)

¹Tolkning av produktsymbolen: $\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$