Matematisk analys, fortsättning – TMA976

Extra övningar 2006

Peter S:

1. För vilka $a > 0$ existerar gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \;?$$
Beräkna det då det existerar.

2. Avgör om följande gränsvärden existerar:
$$\begin{array}{rl} \text{(a)} & \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{1+(y-\cosh x)^2} \\ \text{(b)} & \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{y^2+(y-\cosh x)^2} \\ \text{(c)} & \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2+(y-\cosh x)^2}. \end{array}$$
Observera att $(x, y) \to \infty$ är detsamma som $|(x, y)| \to +\infty$ och som $x^2 + y^2 \to +\infty$.

3. För vilka startvärden x_1 konvergerar följden definierad av rekursionsformeln $x_{n+1} = 2 + \arctan x_n$ mot en lösning till ekvationen $x = 2 + \arctan x$?

4. För Maclaurinutvecklingen av funktionen $(1 + x)^\alpha$ är Lagranges restterm
$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!\,(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}\, x^{n+1},$$
med $0 < \theta < 1$. Här är α ett godtyckligt reellt tal. Visa att $R_{n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$, om $0 < x < 1$.

5. Man vill utveckla

$$\arctan\frac{1}{x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + O(x^{n+1}), \quad x \to 0,$$

för små $x > 0$. Om det finns en sådan utveckling, bestäm a_0, a_1 och a_2, t ex med hjälp av lämpliga gränsvärden.
Härled sedan utvecklingen, på följande eller något annat sätt. Sätt $x = 1/t$ och uttryck $\arctan t$ genom att integrera dess derivata mellan t och $+\infty$. Serieutveckla derivatan i potenser av t^{-1} och integrera termvis.
Hur ser utvecklingen av $\arctan 1/x$ ut för små $x < 0$?

ELW 19.13, 19.15, 19.16, 19.30, 19.34

JohanB:

Ur övningshäftet till envariabelanalysen: 8.76, 8.77, 8.78.
ELW, Blandade uppgifter, s. 203f: 7, 9, 14, 23.