Lösningar till tentamen i

TMA976 Matematisk analys, fortsättning F

2006-12–18

1. Vi Maclaurinutvecklar cosinusfunktionen och därefter funktionen $\ln(1+x)$ och får

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(x+1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x-\frac{x^2}{2})^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^4)\right) \\ &= \frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{12}+O(x^4). \end{aligned}$$

Enligt entydighetssatsen är det sökta Maclaurinpolynomet därför

$$\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{12}.$$

Sista termen här är $f'''(0)x^3/3!$ och man får

$$f'''(0)=\frac{5}{2}.$$

Man kan förstås också derivera funktionen tre gånger och sätta $x=0$ i derivatorna, men det ger längre räkningar.

2. Man kan skriva ekvationen som

$$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

och därför sätter vi $z=y/x$. Observera att x, y och z alla är positiva. Man får $y'=z+xz'$ och ekvationen övergår i $z+xz'=z\ln z$ eller

$$\frac{z'}{z(\ln z-1)}=\frac{1}{x},$$

förutsatt att $z \neq e$. Denna ekvation är separabel och kan skrivas

$$(\ln|\ln z - 1|)' = \frac{1}{x}$$

med lösningar givna av

$$\ln|\ln z - 1| = A + \ln x,$$

dvs.

$$|\ln z - 1| = e^A x,$$

där A är en konstant. Detta kan skrivas

$$\ln z - 1 = \pm Bx.$$

med $B = e^A > 0$, eller

$$y = xe^{1+Cx},$$

där konstanten C nu kan vara positiv eller negativ. För dessa lösningar blir z aldrig e då $x > 0$. Man ser att också $z = e$ för alla $x > 0$ ger en lösning $y = ex$ till den givna ekvationen, som motsvarar $C = 0$ i uttrycket ovan. Den fullständiga lösningen är därför $y = xe^{1+Cx}$, där C är en godtycklig reell konstant.

En annan metod är att sätta $z = \ln y$, vilket ger en linjär, lösbar ekvation i $z = z(x)$.

3. Den homogena ekvationen

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$$

har den karakteristiska ekvationen $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, med trippelrot $r = -1$. Därför är dess lösningar

$$x_n = (an^2 + bn + c)(-1)^n$$

med godtyckliga konstanter a, b, c. I den givna inhomogena ekvationen är högerledet 2^n. Eftersom 2 inte är rot till den karakteristiska ekvationen, kan vi hitta en partikulärlösning genom att ansätta $x_n = q2^n$ med en konstant q. Insättning ger att q måste vara $1/27$. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är därför

$$x_n = (an^2 + bn + c)(-1)^n + 2^n/27.$$

4. Med Stirlings formel får man

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n-\sqrt{n}}\,(n!)^{\frac{1}{n-\sqrt{n}}} = \frac{1}{n-\sqrt{n}}\,\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}(1+\epsilon_n)\right)^{\frac{1}{n-\sqrt{n}}}\\&= \frac{1}{n-\sqrt{n}}\,(2\pi)^{\frac{1}{2(n-\sqrt{n})}}\,n^{\frac{1}{2(n-\sqrt{n})}}\,n^{\frac{n}{n-\sqrt{n}}}\,e^{-\frac{n}{n-\sqrt{n}}}\,(1+\epsilon_n)^{\frac{1}{n-\sqrt{n}}},\end{aligned}$$

där $\epsilon_n \to 0$ då $n \to \infty$. I det sista uttrycket här är det klart att den andra och den sista faktorn båda går mot 1 då $n \to \infty$. Detsamma gäller den tredje faktorn, eftersom den kan skrivas

$$\left(n^{1/n}\right)^{\frac{n}{2(n-\sqrt{n})}} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Den näst sista faktorn går mot e^{-1}. Den fjärde faktorn skriver vi

$$n^{\frac{n}{n-\sqrt{n}}} = n n^{\frac{\sqrt{n}}{2(n-\sqrt{n})}} = n e^{\frac{\sqrt{n}\ln n}{2(n-\sqrt{n})}}$$

och observerar att exponenten för e här går mot 0, så att e-potensen går mot 1.

Sammanfattningsvis återstår det nu att undersöka gränsvärdet av

$$\frac{1}{n-\sqrt{n}}\,ne^{-1},$$

som är e^{-1}. Det sökta gränsvärdet är alltså e^{-1}.

5. Dela in termerna i grupper om 3. Den k:te gruppen blir då

$$\frac{1}{\sqrt{3k-2}} + \frac{1}{\sqrt{3k-1}} - \frac{1}{\sqrt{3k}}.$$

Eftersom de två sista termerna här har positiv summa, är detta uttryck större än

$$\frac{1}{\sqrt{3k-2}}.$$

Det innebär att summan av de första $3m$ termerna av den givna serien är större än

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{\sqrt{3k-2}}.$$

Men denna summa divergerar mot $+\infty$ då $m \to \infty$, eftersom termerna är större än

$$\frac{1}{\sqrt{3k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

och man vet att

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergerar. Slutsatsen blir att den givna seriens partialsummor inte kan konvergera, så serien är divergent.

6. Eftersom $\tan t/t \to 1$ då $t \to 0$, får man $\frac{n}{\sqrt{x}} \tan \frac{\sqrt{x}}{n} \to 1$ då $n \to \infty$ för $x > 0$. Integranden i det givna uttrycket konvergerar därför punktvis mot

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

då $n \to \infty$, för $x > 0$. Vi skall se att den givna integralen konvergerar mot integralen av detta uttryck, tagen mellan 0 och 3. Konvergensen kan visas vara likformig, men det är enklare att använda satsen om dominerad konvergens. För $0 < x < 3$ och stora värden på n blir $\sqrt{x}/n$ litet, och för små $t > 0$ är $\tan t \leq 2t$ eftersom derivatan av $\tan t$ i 0 är 1. Därför kan vi dominera integranden enligt

$$\left| \frac{n \tan(\sqrt{x}/n)}{x(1+x)} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)},$$

för stora n. Integralen av högerledet över $(0,3)$ existerar,

$$\int_0^3 \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx < \infty,$$

och satsen om dominerad konvergens ger att den givna integralen konvergerar mot

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx,$$

För att beräkna denna integral sätter vi $\sqrt{x} = s$, så att integralen transformeras till

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{ds}{1+s^2} = 2 \arctan \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Det sökta gränsvärdet är alltså $\frac{2\pi}{3}$.

Man kan också börja med substitutionen $\sqrt{x} = s$ och sedan tillämpa likformig konvergens.

7 och 8. Se kurslitteraturen. I uppgift 7 gäller det förstås bara att formulera den angivna satsen, inte att bevisa den.