Lösningar till tentamen i

TMA976 Matematisk analys, fortsättning F

2007-04-14

1.

Ekvationens karakteristiska polynom är r^2+1, med nollställen $\pm i$. Den homogena ekvationen $y''+y=0$ har därför den allmänna lösningen $A\cos x + B\sin x$, med godtyckliga konstanter A och B. Vi söker en partikulärlösning till den givna ekvationen, och observerar att högerledet $x\sin x$ är imaginärdelen av xe^{ix}. Därför bestämmer vi först en partikulärlösning till ekvationen $y''+y = xe^{ix}$. Koefficienten i i exponenten här är ett nollställe till det karakteristiska polynomet med multipliciteten 1, och faktorn x är ju ett polynom av grad 1. Därför gör vi ansatsen $y(x) = x(ax+b)e^{ix} = (ax^2+bx)e^{ix}$. Insatt i vänsterledet ger detta

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &+ \quad y(x) \\ &= [2a + 2i(2ax+b) - (ax^2+bx)]e^{ix} + (ax^2+bx)e^{ix} \\ &= (4iax + 2a + 2ib)e^{ix}. \end{aligned}$$

(Här kunde vi också använt förskjutningsregeln.) Det sista uttrycket ovan ska stämma med högerledet xe^{ix}, och därför måste man ha $4ia = 1$ och $2a+2ib = 0$. Detta ger $a = -i/4$ och $b = 1/4$, så att $y(x) = x(-ix/4 + 1/4)e^{ix}$ är en partikulärlösning till $y''+y = xe^{ix}$. Imaginärdelen blir $\Im[x(-ix/4+1/4)e^{ix}] = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$, som alltså är en partikulärlösning till $y''+y = x\sin x$. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen får vi nu genom att till denna imaginärdel addera en godtycklig lösning till den homogena ekvationen, alltså

$$y(x) = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x + A\cos x + B\sin x,$$

där A och B är godtyckliga konstanter. För att slutligen få rätt startvärden observerar vi att $y(0) = A$ och $y'(0) = B$. Man måste alltså välja $A = 1$ och $B = -1$, och den sökta lösningen är

$$y(x) = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x + \cos x - \sin x,$$

2.
Om nämnaren $\ln(e^n - n^2)$ är positiv, är serien alternerande. Men $\ln(e^n - n^2) > 0$ är ekvivalent med $e^n > n^2 + 1$, som är uppfyllt i varje fall för stora n, eftersom $e^n/n^2 \to \infty$ då $n \to \infty$. (Man kan lätt verifiera att det faktiskt gäller för alla $n \geq 1$.) Serien är alltså alternerande, frånsett möjligen några termer i början. Undersök nu om förutsättningarna i Leibniz sats är uppfyllda för stora n. Det är klart att termerna går mot 0, eftersom $\ln(e^n - n^2) \to \infty$ då $n \to \infty$. Termernas absolutbelopp är avtagande om följden $\ln(e^n - n^2)$ är växande, vilket är ekvivalent med att följden $e^n - n^2$ är växande och alltså med $e^{n+1} - (n+1)^2 \geq e^n - n^2$ för $n = 1, 2, \ldots$. Denna olikhet kan skrivas som $(e-1)e^n \geq 2n+1$, och den är därför uppfylld för stora n. Leibniz sats ger nu att serien är konvergent.

3.
Betrakta uttrycket som ett bråk med integralen i täljaren och $\sqrt{x}$ i nämnaren. Nämnaren går mot $+\infty$ då $x \to +\infty$, och detsamma gäller täljaren. Man kan nämligen jämföra integralen med $\int_2^x 1/\sqrt{t}\,dt$, som divergerar då $x \to +\infty$. Täljarens derivata är $1/\sqrt{x - 1/x}$, och nämnarens derivata $1/(2\sqrt{x})$. Kvoten mellan

dessa två är

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1/x}} = 2\sqrt{\frac{x}{x-1/x}},$$

och detta uttryck har gränsvärdet 2 då $x \to +\infty$. Eftersom nämnarens derivata är positiv för alla $x > 2$, kan vi använda l'Hospitals regel och dra slutsatsen att det sökta gränsvärdet är 2.

En annan metod är att uppskatta hur mycket integralen avviker från $\int_2^\infty 1/\sqrt{t}\,dt$. Skillnaden mellan de två integranderna kan bestämmas med medelvärdessatsen:

$$\frac{1}{\sqrt{t-1/t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}}\Big|_{t=\xi} = \frac{1}{t}\,\frac{1}{2\xi^{3/2}},$$

där $t - 1/t < \xi < t$. För att se att den sista kvantiteten är liten behöver vi veta att ξ är stort. Men eftersom $t > 2$ är $1/t < 1/2 < t/2$ och därför är $\xi > t - t/2 = t/2$. Detta medför

$$\frac{1}{t}\,\frac{1}{2\xi^{3/2}} < \frac{1}{2}\,2^{3/2}\,\frac{1}{t^{5/2}} = \sqrt{2}\,\frac{1}{t^{5/2}}.$$

Integralen skriver vi nu som

$$\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{t-1/t}} = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_2^x \left(\frac{1}{\sqrt{t-1/t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt.$$

I högerledet här är den första integralen lika med $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}$. Den andra integralen är positiv men mindre än

$$\sqrt{2}\int_2^x \frac{dt}{t^{5/2}} = \sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,(2^{-3/2} - x^{-3/2}),$$

och denna kvantitet är begränsad för stora x. Genom att dividera ovanstående likhet mellan integralerna med $\sqrt{x}$ och låta $x \to \infty$ ser vi därför att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{t-1/t}} = 2.$$

4.
Följden uppfyller rekursionsformeln $x_{n+1} = f(x_n)$ med $f(x) = \cos x$. Satsen om sådana följder säger att man har konvergens om startvärdet ligger i ett begränsat slutet intervall I med egenskaperna $f(I) \subset I$ och $\sup_I |f'| < 1$. För att hitta ett sådant intervall observerar vi först att $|f'(x)| = |\sin x|$, så att $|f'(x)| < 1$ för alla x utom $x = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Intervallet I får alltså inte ligga i närheten av dessa undantagspunkter. Lägg märke till att funktionens värdemängd är $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, så att $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$. I intervallet $[-1, 1]$ är $\sin x$ växande, och eftersom sinusfunktionen är udda, har man

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\sin x| = \sin 1 < 1.$$

Intervallet $I = [-1, 1]$ uppfyller sålunda både $f(I) \subset I$ och $\sup_I |f'| < 1$. Startvärden $x_1 \in I$ ger alltså konvergens (mot den entydiga lösningen i I till ekvationen $x = \cos x$). Men ett godtyckligt startvärde x_1 ger $x_2 = \cos x_1 \in I$ och därmed konvergens (mot samma gränsvärde).
Alla startvärden ger alltså konvergens.

5.
Koefficienten för x^k i denna potensserie är k. Konvergensradien blir då $1/\lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1$, eftersom detta gränsvärde existerar. Det innebär att serien konvergerar för $|x| < 1$ men divergerar för $|x| > 1$. För $x = \pm 1$ divergerar den eftersom termerna inte går mot 0. Konvergensmängden ges alltså av $|x| < 1$.

Kalla summan av serien $f(x)$, där $|x| < 1$. Då är

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{1}^{\infty} kx^{k-1},$$

och denna serie känner vi igen som den termvisa derivatan av den geometriska serien $\sum_1^\infty x^k$. Även denna geometriska serie har konvergensradie 1, och dess summa är $x/(1-x) = 1/(1-x) - 1$. Enligt sats kan en potensserie deriveras termvis i det inre av konvergensintervallet. Genom att derivera båda leden i ekvationen

$$\sum_{1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1, \quad |x| < 1$$

får vi därför att

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Alltså är summan av den givna serien $f(x) = x/(1-x)^2$ för $|x| < 1$.

6.

Observera att uttrycket för $f_n(x)$ kan ses som en differenskvot för kvadratrotsfunktionen,

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h},$$

där $h = 1/n$. Eftersom $h \to 0$ då $n \to \infty$, kommer $f_n(x)$ att konvergera mot derivatan av kvadratrotsfunktionen i punkten x, alltså

$$f_n(x) \to \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad n \to \infty.$$

För att visa likformigheten ska vi uppskatta supremum av

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|$$

taget i intervallet $1 \leq x \leq \infty$. Vi skriver om $f_n(x)$ genom att multiplicera och dividera med $\sqrt{x + 1/n} + \sqrt{x}$ och använda konjugatregeln, vilket ger

$$f_n(x) = n \frac{1/n}{\sqrt{x + 1/n} + \sqrt{x}}.$$

Härav följer

$$f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 1/n} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + 1/n}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x + 1/n} + \sqrt{x})},$$

där vi i sista steget gjorde liknämnigt och förenklade täljaren. Nu förlänger vi igen med $\sqrt{x + 1/n} + \sqrt{x}$ och får

$$f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1/n}{2\sqrt{x}(\sqrt{x + 1/n} + \sqrt{x})^2}.$$

Vi kan nu lätt uppskatta absolutbeloppet av denna kvantitet. För $x \geq 1$ är $\sqrt{x} \geq 1$ och $\sqrt{x + 1/n} \geq 1$, så att

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1/n}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8n}, \quad x \geq 1.$$

Eftersom högerledet $1/(8n)$ inte beror av x, innebär detta en uppskattning av supremum, nämligen

$$\sup_{x \geq 1} \left| f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{8n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Därmed är den likformiga konvergensen visad.

En minst lika bra metod att uppskatta samma supremum är att använda medelvärdessatsen på kvadratrotsfunktionen och få

$$f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

för något ξ med $x < \xi < x + 1/n$. Härav följer

$$f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\xi}}{2\sqrt{x}\sqrt{\xi}}.$$

Nu förlänger vi med $\sqrt{x} + \sqrt{\xi}$ och tar absolutbeloppet, vilket ger

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \frac{\xi - x}{2\sqrt{x}\sqrt{\xi}(\sqrt{x} + \sqrt{\xi})}.$$

Högerledet här är mindre än

$$\frac{1/n}{4} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Den likformiga konvergensen följer som förut.

7 och 8.
Se kurslitteraturen.