Lösningar till tentamen i

TMA976 Matematisk analys, fortsättning F

2007-08-23

1.

Ekvationens karakteristiska polynom är r^2-r-1, med nollställen $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Den homogena ekvationen, alltså $y''-y'-y=0$, har därför den allmänna lösningen

$$y(x) = A\exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) + B\exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right).$$

En partikulärlösning till den givna ekvationen kan fås som realdelen av en partikulärlösning till ekvationen $y''-y'-y=e^{ix}$. Eftersom koefficienten i här inte är ett nollställe till det karakteristiska polynomet, kan vi då ansätta $y(x)=ce^{ix}$. Insatt i vänsterledet ger det $c(-1-i-1)e^{ix}$, så att $c=-1/(2+i)=(-2+i)/5$. Partikulärlösningen till den givna ekvationen blir därför $y(x)=\Re(ce^{ix})=-\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x$. Kombinerat med lösningen till den homogena ekvationen ovan, betyder detta att den allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$$y(x) = -\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x + A\exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) + B\exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right).$$

Begynnelsevärdena $y(0)=0, \quad y'(0)=0$ leder till ekvationssystemet

$$-\frac{2}{5}+A+B=0$$

$$-\frac{1}{5}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}A+\frac{1-\sqrt{5}}{2}B=0$$

med lösningen $A = B = 1/5$. Den sökta lösningen blir då

$$y(x) = -\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{5}\left(\exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) + \exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right)$$

som också kan skrivas

$$y(x) = -\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}e^{x/2}\cosh\left(x\sqrt{5}/2\right).$$

2.
Skriv först uttrycket som

$$e^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\ln\cos x}.$$

Med Maclaurinutveckling kan exponenten här skrivas om som

$$\begin{aligned} & \frac{(1+O(x^2))^2}{(x+O(x^3))^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) \\ = \; & \frac{1+O(x^2)}{x^2(1+O(x^2))}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) \\ = \; & -\frac{1}{2}\,\frac{1+O(x^2)}{1+O(x^2)}\,(1+O(x^2)) \to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

då $x \to 0$. Gränsvärdet blir alltså $e^{-1/2}$.

3.
För stora n är absolutbeloppen $\ln(1+n)/n$ av seriens termer större än $1/n$. Eftersom serien $\sum 1/n$ divergerar, ger jämförelsekriteriet att även $\sum \ln(1+n)/n$ divergerar. Den givna serien är därför inte absolutkonvergent.

Termerna i den givna serien är alternerande och går mot 0. Om dessutom deras absolutbelopp är avtagande, medför Leibniz sats om alternerande serier konvergens. För att verifiera detta avtagande, är nog det enklaste att ersätta n med en reell variabel x och derivera. Vi får då funktionen $f(x) = \ln(1+x)/x$ för $x > 0$, med derivata

$$f'(x) = \frac{x/(1+x) - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

För stora x är här täljaren negativ, medan nämnaren är positiv, så att derivatan är negativ och funktionen f alltså avtagande för stora x. Detta betyder att absolutbeloppen av seriens termer är avtagande för stora n. Därför medför Leibniz sats att serien är konvergent.

4.
Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen, och man kan multiplicera den med en integrerande faktor. För att finna denna faktor observerar vi att en primitiv funktion till koefficienten $-\tan x$ för y är $\ln\cos x$; här behövs inget absolutbelopp eftersom $\cos x$ är positiv i den angivna intervallet $|x| < \pi/2$. Den integrerande faktorn blir $e^{\ln\cos x} = \cos x$, och efter multiplikation får vi ekvationen

$$y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$$

Som väntat är nu vänsterledet derivatan av en produkt. Även högerledet skriver vi om, så att ekvationen blir

$$(y\cos x)' = \frac{\cos 2x + 1}{2}.$$

Lösningen ges av

$$y \cos x = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$$

eller

$$y = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{C}{\cos x}.$$

5.
Man får $x_1 = \beta^2, \;\; x_2 = \beta^4, \;\; x_3 = \beta^8$ och allmänt $x_n = \beta^{2^n}$.
a) För $\beta > 1$ divergerar därför följden $\{x_n\}$. För $0 < \beta < 1$ konvergerar den mot 0, och för $\beta = 1$ får man den konstanta följden (1, 1, ...) och alltså konvergens mot 1.
b) Med Stirlings formel kan $n!x_n$ skrivas

$$\begin{aligned} n!x_n &= n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\epsilon_n)\beta^{2^n} \\ &= e^{n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln n + \ln(1+\epsilon_n) + 2^n \ln \beta}, \end{aligned}$$

där $\epsilon_n \to 0$ då $n \to \infty$. För att se hur exponenten här uppför sig för stora n lägger vi märke till att den dominerande termen är $2^n \ln \beta$. Om $\beta > 1$ gör den att hela exponenten divergerar mot $+\infty$, så att följden $\{n!x_n\}$ divergerar. Om $0 < \beta < 1$, är $\ln \beta < 0$, exponenten divergerar mot $-\infty$ och följden $\{n!x_n\}$ konvergerar mot 0. Om slutligen $\beta = 1$ är det klart att $\{n!x_n\}$ divergerar.

6.
Detta är en potensserie med koefficienter $a_k = (-1)^k/k^2$. Eftersom $|a_k|^{1/k} = k^{2/k}$ konvergerar mot 1 då $k \to \infty$, ger rotformeln

att seriens konvergensradie är 1. I konvergensintervallets ändpunkter $x = \pm 1$ är serien absolutkonvergent och därmed konvergent. Detta betyder att serien konvergerar för $|x| \leq 1$ men inte för $|x| > 1$.
För $|x| \leq 1$ kan man majorera $|a_k x^k|$ med $1/k^2$, och eftersom $\sum 1/k^2$ konvergerar, medför Weierstrass majorantsats att serien konvergerar likformigt i intervallet $|x| \leq 1$.
Då $|x| < 1$ kan man enligt en sats derivera seriens summa termvis, och derivatan blir alltså

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^{k-1} = -x^{-1} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Den sista summan här känner vi igen som Maclaurinutvecklingen av funktionen $\ln(1+x)$, som konvergerar för $|x| < 1$. Därför är derivatan av den givna seriens summa $-x^{-1}\ln(1+x)$ för $|x| < 1$.

7 och 8.
Se kurslitteraturen.