MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Telefonvakt: Rolf Liljendhal, tel. 0740 459022
Tentamen | 2003–04–17 kl. 08.45–12.45

Matematisk Analys F1, del A (TMA 975)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1) Lös differensekvationen (8p)

$$2y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n2^{-n}, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1.$$

2) Lös differentialekvationen (8p)

$$y''' + 3y'' - 4y = 2x^2 + 5, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 5.$$

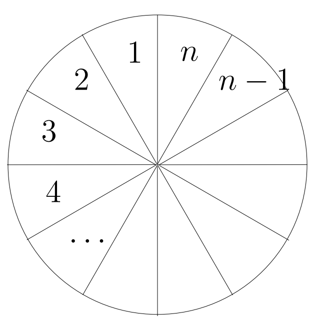
3) Undersök för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent. (8p)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+7}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{2n}}{(2n)!}$

4) Bestäm summan för potensserien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-1}$. (7p)

5) Beräkna $\sqrt[3]{1003}$ med 7 gällande decimaler (ett absolut fel mindre än 5×10^{-8}). (7p)

6) En cirkel är indelad i n lika stora och numrerade sektorer (se figuren). Varje sektor skall färgläggas med en färg och det finns totalt k $(k \geq 3)$ stycken färger att välja bland.



(a) Låt a_n vara antalet sätt att färglägga figuren så att två närliggande cirkelsektorer inte har samma färg. Visa att om $n \geq 3$ så gäller följande differensekvation (4p)

$$a_{n+1} + a_n = k(k-1)^n.$$

(En liten ledtråd finns på nästa sida.)

(b) Bestäm a_n (vad är a_3 ?). (4p)

Var god vänd!

7) Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8) Formulera och bevisa en sats om konvergens och divergens för serien (7p)
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, där p är en reell konstant.

Lite hjälp till uppgift 6a: Tänk på att när sista cirkelsektorn (nr. $n+1$) skall färgläggas så är antalet färger man kan välja bland beroende på om sektorerna nr. 1 och nr. n (första och näst sista) har samma färg eller ej.

Lycka till!
TG