

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 28/3 2008, 14.00-18.00

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: David Heintz, 0762-721860.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y''' + y = x^2 \sin x. \quad (7p)$$

2. (a) Utveckla $\sqrt{\cos x}$ i potenser av x med resttermen $O(x^6)$.

(4p)

- (b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}. \quad (4p)$$

3. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar

- (a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (3p)$$

- (b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{2}{n\pi}\right) \quad (4p)$$

4. Sätt

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{4n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bestäm alla intervall $[a, b]$ där $a < b$ sådana att funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[a, b]$.

(7p)

5. Ur en jättehög med godispåskägg tar Lisa och Lasse ägg. De startar båda med noll ägg och tar varannan gång. Lisa tar först ett ägg och sedan tar Lasse två ägg. De fortsätter sedan att ta ägg enligt formeln.

- Lisa tar tre gånger så många ägg som Lasse totalt tagit plus lika många ägg som hon tog förra gången,
- Lasse tar två gånger så många ägg som Lisa totalt tagit.

Hur många ägg har Lasse tagit då han tagit ägg n gånger.

(7p)

6. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' = yy', \\ y(1) = -2, y'(1) = 2. \end{cases}$$

(8p)

7. Bevisa satsen om potensseriers konvergens.

(8p)

8. Antag att $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$. Visa att om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0. \quad (1)$$

Visa att (1) är ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ska konvergera.

(8p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK