Linjära differentialekvationer av ordning n

En linjär differentialekvation av ordning n är av formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x). \tag{1}$$

Ekvationen kallas *homogen* om $h(x) \equiv 0$, *inhomogen* annars. Ekvationen sägs ha *konstanta koefficienter*, om $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ alla är konstanta.

Skriv vänsterledet i (1) som $L[y]$, där L är en *differentialoperator*. Vi önskar uttrycka L med hjälp av *deriveringsoperatorn* $D = \frac{d}{dx}$. Vi har

$$y' = Dy, \quad y'' = D^2y = D(Dy) \quad \text{osv.},$$

så att

$$\begin{aligned} L[y] &= D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y \\ &= (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = P(D)y. \end{aligned}$$

Alltså är $L = P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ ett polynom i D. Vi kallar L *linjär*, eftersom

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2] &= L[y_1] + L[y_2], \\ L[\alpha y] &= \alpha L[y], \quad \alpha \text{ konstant.} \end{aligned}$$

För en typisk term $a_k(x)D^k$ i $P(D)$ är nämligen

$$\begin{aligned} a_k(x)D^k[y_1 + y_2] &= a_k(x)(D^k y_1 + D^k y_2) = a_k(x)D^k y_1 + a_k(x)D^k y_2, \\ a_k(x)D^k[\alpha y] &= \alpha a_k(x)D^k y, \end{aligned}$$

varefter addition ger påståendet.

Om y_1 och y_2 är lösningar till den homogena ekvationen $L[y] = 0$, så är $c_1y_1 + c_2y_2$ också en lösning för godtyckliga konstanter c_1 och c_2, ty

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

Detta brukar kallas *superpositionsprincipen.*

Sats. *Om y_p är någon lösning till $L[y] = h(x)$ (en partikulärlösning), så är y en lösning till $L[y] = h(x)$ om och endast om $y_h = y - y_p$ löser $L[y_h] = 0$. Med andra ord har $L[y] = h(x)$ allmänna lösningen $y = y_h + y_p$, där y_h är allmänna lösningen till $L[y_h] = 0$.*

Bevis. På grund av lineariteten hos L är

$$L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = L[y] - h(x),$$

varför $L[y] = h(x)$ om och endast om $L[y - y_p] = 0$. $\square$

Homogena ekvationer med konstanta koefficienter

Antag nu att alla a_k är konstanta. Betrakta den homogena ekvationen $L[y] = P(D)y = 0$. Polynomet P kallas för det *karakteristiska polynomet*, och ekvationen

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

kallas *karakteristiska ekvationen.*

Vi behöver några regler för räkning med operatorpolynom. Om a och b är konstanter, så är

$$\begin{aligned}\big((D+a)(D+b)\big)[y] &= (D+a)[(D+b)y] = (D+a)[Dy+by] \\ = D[Dy+by] + a(Dy+by) &= D^2y + bDy + aDy + aby = \big(D^2 + (a+b)D + ab\big)y,\end{aligned}$$

dvs. vi får multiplicera ihop $(D+a)(D+b) = D^2 + aD + bD + ab$ "som vanligt". Allmänt gäller för polynom P och Q med konstanta koefficienter att $(PQ)(D) = P(D)Q(D)$. Vi behöver ofta beräkna uttryck av formen $P(D)[ze^{cx}]$, där c är en komplex konstant. Först påminner vi om att om $c = \alpha + i\beta$, är

$$e^{cx} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \quad \text{och} \quad De^{cx} = ce^{cx}.$$

Sats (Förskjutningsregeln). *Om P har konstanta koefficienter, och om c är en (reell eller komplex) konstant, är*

$$P(D)[ze^{cx}] = e^{cx}P(D+c)z.$$

Bevis. Det gäller att

$$\begin{aligned}D[ze^{cx}] &= z'e^{cx} + zce^{cx} = e^{cx}(Dz + cz) = e^{cx}(D+c)z = e^{cx}z_1, \\ D^2[ze^{cx}] &= D[z_1e^{cx}] = e^{cx}(D+c)z_1 = e^{cx}(D+c)^2z,\end{aligned}$$

och allmänt

$$D^k[ze^{cx}] = e^{cx}(D+c)^k z.$$

Av detta fås nu

$$\begin{aligned}P(D)[ze^{cx}] &= D^n[ze^{cx}] + a_{n-1}D^{n-1}[ze^{cx}] + \cdots + a_1D[ze^{cx}] + a_0ze^{cx} \\ &= e^{cx}(D+c)^nz + a_{n-1}e^{cx}(D+c)^{n-1}z + \cdots + a_1e^{cx}(D+c)z + a_0e^{cx}z \\ &= e^{cx}\big((D+c)^n + a_{n-1}(D+c)^{n-1} + \cdots + a_1(D+c) + a_0\big)z \\ &= e^{cx}P(D+c)z,\end{aligned}$$

vilket är påståendet. □

Låt oss återvända till ekvationen $P(D)y = 0$. Om r är en konstant, är $D^ke^{rx} = r^ke^{rx}$, och $P(D)[e^{rx}] = P(r)e^{rx}$, och alltså är e^{rx} en lösning till $P(D)y = 0$ om och endast om $P(r) = 0$, dvs. r är en rot till karakteristiska ekvationen. Låt nu de olika rötterna till $P(r) = 0$ vara $r_1, r_2, \ldots, r_k$ med multipliciteter $m_1, m_2, \ldots, m_k$. För varje j, $1 \leq j \leq k$, kan vi enligt faktorsatsen skriva $P(r) = Q_j(r)(r - r_j)^{m_j}$ för något polynom Q_j av grad $n - m_j$. Låt $p_j(x)$ vara ett godtyckligt polynom av grad $m_j - 1$, $1 \leq j \leq k$. Enligt förskjutningsregeln är

$$P(D)[p_j(x)e^{r_jx}] = e^{r_jx}P(D+r_j)[p_j(x)] = e^{r_jx}Q_j(D+r_j)D^{m_j}[p_j(x)] = 0.$$

Enligt superpositionsprincipen är varje funktion av formen $y = p_1(x)e^{r_1x} + \cdots + p_k(x)e^{r_kx}$ en lösning till ekvationen $P(D)y = 0$. I själva verket ger detta allmänna lösningen till ekvationen.

Sats. *Om den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$ har de olika rötterna $r_1,\ r_2, \dots, r_k$ med multipliciteter $m_1,\ m_2, \dots, m_k$, så är den allmänna lösningen till ekvationen $P(D)y = 0$*

$$y = p_1(x)e^{r_1 x} + \cdots + p_k(x)e^{r_k x}, \tag{2}$$

där $p_j(x)$ är ett godtyckligt polynom av grad högst $m_j - 1$ för $j = 1, 2, \dots, k$.

Bevis. Vi har redan visat att varje funktion av formen (2) är en lösning. Omvänt måste vi nu visa att varje lösning är av den formen. Beviset är induktion i k. Om $k = 1$, är $P(r) = (r - r_1)^n$, och om y är en godtycklig lösning till $P(D)y = 0$, så är enligt förskjutningsregeln

$$D^n[ye^{-r_1 x}] = e^{-r_1 x}(D - r_1)^n[y] = e^{-r_1 x}P(D)y = 0,$$

varför n integrationer ger att $ye^{-r_1 x}$ är ett polynom $p_1(x)$ av grad högst $n - 1 = m_1 - 1$. Alltså gäller påståendet för $k = 1$. Antag så att $k > 1$ och att påståendet är sant för varje polynom P med färre än k olika nollställen. Låt nu P ha k olika nollställen och låt y vara en godtycklig lösning till $P(D)y = 0$. Låt som förut nollställena vara $r_1,\ r_2, \dots, r_k$ med multipliciteterna $m_1,\ m_2, \dots, m_k$. Skriv $P(r) = Q_1(r)(r - r_1)^{m_1}$, och sätt $z = (D - r_1)^{m_1} y$. Då är

$$0 = P(D)y = Q_1(D)(D - r_1)^{m_1} y = Q_1(D)z.$$

Eftersom Q_1 är ett polynom med de $k - 1$ olika nollställena $r_2, \dots, r_k$ med multipliciteter $m_2, \dots, m_k$, ger induktionsantagandet att

$$z = q_2(x)e^{r_2 x} + \cdots + q_k(x)e^{r_k x}$$

för vissa polynom $q_j(x)$ av grad högst $m_j - 1$, $j = 2, \dots, k$. Enligt förskjutningsregeln är

$$D^{m_1}[ye^{-r_1 x}] = e^{-r_1 x}(D - r_1)^{m_1} y = e^{-r_1 x} z = q_2(x)e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + q_k(x)e^{(r_k - r_1)x}.$$

Integrera partiellt enligt följande mönster: Om $q(x)$ är ett polynom och $c \neq 0$, är

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{cx}\,dx &= \frac{1}{c}q(x)e^{cx} - \int \frac{1}{c}q'(x)e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}q(x)e^{cx} - \frac{1}{c^2}q'(x)e^{cx} + \int \frac{1}{c^2}q''(x)e^{cx}\,dx \\ &= \cdots = \tilde{q}(x)e^{cx} + C,\end{aligned}$$

där $\tilde{q}(x)$ är ett polynom av samma grad som $q(x)$ och C är en konstant. Upprepad användning av detta ger vid handen att det finns polynom $p_1(x),\ p_2(x), \dots, p_k(x)$ av grad högst $m_1 - 1$, $m_2 - 1, \dots, m_k - 1$ så att

$$ye^{-r_1 x} = p_1(x) + p_2(x)e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + p_k(x)e^{(r_k - r_1)x}.$$

Därför blir y av formen (2), och satsen är bevisad. □

Inhomogena ekvationer

Betrakta nu den inhomogena ekvationen $P(D)y = h(x)$, där $P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ är ett polynom med konstanta koefficienter. Vi skall ange hur man kan finna en partikulärlösning i några olika fall.

I. $h(x) =$ polynom.
Om $a_0 \neq 0$, ansätt $y_p(x) = q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $h(x)$.
Om $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, ansätt $y_p(x) = x^m q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $h(x)$.

II. $h(x) = g(x)e^{\alpha x}$, där $g(x)$ är ett polynom.
Skriv $y = ze^{\alpha x}$. Då blir

$$P(D)y = P(D)[ze^{\alpha x}] = e^{\alpha x}P(D+\alpha)z = g(x)e^{\alpha x},$$

så att $P(D+\alpha)z = g(x)$, som löses som i I. Vi ser att man också direkt kan ansätta $y_p(x) = x^m q(x)e^{\alpha x}$, där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $g(x)$, och där m är multipliciteten hos α som rot till karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$ ($m = 0$ om α inte är en rot).

III. $h(x) = g(x)\cos\beta x$ eller $h(x) = g(x)\sin\beta x$, där $g(x)$ är ett polynom.
Betrakta hjälpekvationen

$$P(D)u = g(x)e^{i\beta x}$$

och bestäm en lösning som i II. Skriv alltså $u = ze^{i\beta x}$. Då blir

$$P(D)u = e^{i\beta x}P(D+i\beta)z = g(x)e^{i\beta x}, \qquad P(D+i\beta)z = g(x),$$

och vi kan bestämma en lösning z i form av ett lämpligt polynom. Vi har

$$P(D)[\operatorname{Re} u + i\operatorname{Im} u] = g(x)(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

och om $P(D)$ och $g(x)$ har reella koefficienter, blir

$$P(D)[\operatorname{Re} u] = g(x)\cos\beta x \quad \text{och} \quad P(D)[\operatorname{Im} u] = g(x)\sin\beta x.$$

IV. $h(x) = g(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ eller $h(x) = g(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, där $g(x)$ är ett polynom.
Betrakta hjälpekvationen

$$P(D)u = g(x)e^{(\alpha+i\beta)x},$$

och bestäm en partikulärlösning.

V. $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$.
Lös $P(D)y_1 = h_1(x)$ och $P(D)y_2 = h_2(x)$. Då är $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ en lösning.